

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

Pevnostní výpočet jeřábového háku

The Crane Hook Strength Calculation

Student:

Anna Tošková

Vedoucí bakalářské práce:

Dr. Ing. Ludmila Adámková

Ostrava 2019

Zadání bakalářské práce

Student:

Anna Tošková

Studijní program:

B2341 Strojírenství

Studijní obor:

3901R003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Pevnostní výpočet jeřábového háku
The Crane Hook Strength Calculation

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

1. Proveďte rozbor namáhání jeřábového háku.
2. Proveďte analytický výpočet jeřábového háku.
3. Pomocí metody konečných prvků proveďte numerické řešení zadané úlohy.
4. Porovnejte výsledky analytického a numerického řešení.

Seznam doporučené odborné literatury:

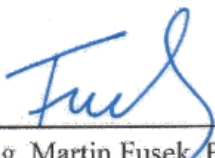
- [1] REMTA, F., KUPKA, L. Jeřáby. SNTL Praha 1956
- [2] HOSCHL, C. Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL Praha 1971
- [3] LENERT, J. Pružnost a pevnost II. Ostrava 1988. ISBN 80-7078-572-1
- [4] TIMOSCHENKO, S., GODIER, J. N. Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill Book Company, 1951
- [5] SADD, M. H. Elasticity: Theory, Applications and Numerics. Academic Press, 2009

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí bakalářské práce: **Dr. Ing. Ludmila Adámková**

Datum zadání: 21.12.2018

Datum odevzdání: 20.05.2019


Ing. Martin Fusek, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 17.5.2019

.....
.....

podpis

Prohlašuji, že

- jsem byla seznámena s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 - užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Úřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucí bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 17.5.2019

Tošková

podpis

Jméno a příjmení autora práce:

Anna Tošková

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Lesní 3A, Opava, 747 06

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí bakalářské práce Dr. Ludmile Adámkové za pomoc a cenné rady, které pro mě byly velmi nápomocné při vytváření této bakalářské práce.

Anotace bakalářské práce

TOŠKOVÁ, A. Pevnostní výpočet jeřábového háku: bakalářská práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2019, 52 s. Vedoucí práce: Dr. Ing. Adámková, L.

Bakalářská práce se zabývá pevnostním výpočtem jeřábového háku. Práce je zaměřena konkrétně na výpočet jednoduchého jeřábového háku zatíženého osamělou silou v jeho svislé ose. Tento problém je řešen analyticky i numericky. Analytický výpočet je proveden dvěma způsoby – dle [1] a pomocí teorie křivých prutů. Numerický výpočet je proveden metodou konečných prvků v programu ANSYS Workbench 19.2. V práci je u obou výpočtů zahrnuta i část teoretická vysvětlující danou problematiku. Výsledky analytického a numerického výpočtu jsou na závěr porovnány.

Klíčová slova: pevnostní výpočet, jeřábový hák, napětí, ohyb, křivý prut, metoda konečných prvků, ANSYS Workbench

Annotation of bachelor thesis

TOŠKOVÁ, A. The Crane Hook Strength Calculation: Bachelor Thesis. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2019, 52 p. Thesis head: Dr. Ing. Adámková, L.

This bachelor thesis deals with the crane hook strength calculation. The thesis is focused particularly on strength calculation of simple crane hook which is loaded with single force in its vertical axis. This problem is solved analytically and numerically. The analytical calculation is done in two ways – according to [1] and by theory of curved bars. The numerical calculation is done by the finite element method in programme ANSYS Workbench 19.2. The theoretical part explaining the given issue is included in both calculations. The results of the analytical and numerical calculation are finally compared.

Key words: strength calculation, crane hook, stress, bending, curved bar, finite element method, ANSYS Workbench

Obsah

Seznam použitých zkratk a symbolů.....	9
Úvod	11
1. Jeřábový hák.....	12
1.1 Materiál háku	12
1.2 Tvar háků.....	12
1.3 Závit háku	14
2. Křivé pruty.....	15
2.1 Ohyb silně zakřivených prutů	15
2.2 Podmínka pevnosti silně zakřivených prutů.....	20
3. Rozbor namáhání jeřábového háku.....	21
3.1 Průřez I - I	21
3.2 Průřez II – II	23
3.3 Průřez III – III	25
4. Analytický výpočet jeřábového háku.....	27
4.1 Výpočet napětí a bezpečnosti pro průřez I - I	28
4.2 Výpočet napětí a bezpečnosti pro průřez II - II	29
4.2.1 Výpočet dle [1]	29
4.2.2 Výpočet dle teorie křivých prutů	32
5. Úvod k numerickým metodám řešení	36
5.1 Historie MKP	36
5.2 Přístupy k řešení přímé úlohy pružnosti	37
5.3 Princip MKP	38
5.4 Postup MKP	39
6. Výpočet pomocí MKP	40
6.1 Model geometrie	40
6.2 Materiál	40
6.3 Konečnoprvkový model.....	41
6.4 Model okrajových podmínek.....	42
6.5 Výsledky napětí.....	43

6.5.1	Redukované napětí (HMH).....	43
6.5.2	Normálové napětí v ose y.....	45
7.	Porovnání výsledků	47
	Závěr.....	49
	Seznam použité literatury	51

Seznam použitých zkratk a symbolů

a	Polovina rozměru rozevření háku	[mm]
B	Šířka příčného průřezu	[mm]
b ₁	Šířka průřezu II - II	[mm]
b ₂	Šířka průřezu II - II	[mm]
c	Součinitel tvaru průřezu	[1]
d ₃	Průměr průřezu I - I	[mm]
dφ	Úhel, který svírají příčné průřezy nekonečně malé části křivého prutu	[°]
E	Modul pružnosti v tahu (Youngův modul)	[MPa]
e ₁	Vzdálenost vnějšího krajního vlákna příčného průřezu	[mm]
e ₂	Vzdálenost vnitřního krajního vlákna příčného průřezu	[mm]
F	Síla	[N]
g	Tíhové zrychlení	[m·s ⁻²]
h	Výška profilu křivého prutu	[mm]
J	Moment setrvačnosti	[mm ⁴]
k _t ^I	Součinitel bezpečnosti v tahu pro průřezu I - I	[1]
k _t ^{II}	Součinitel bezpečnosti v tahu pro průřezu II - II	[1]
M	Moment	[N·mm]
N	Normálová síla	[N]
P	Potenciál vnějšího zatížení	[J]
p	Vektor plošného zatížení	[MPa]
r	Poloměr křivosti neutrální osy	[mm]
r'	Rameno síly	[mm]
R _e	Mez kluzu	[MPa]
R _i	Poloměr křivosti vnitřního krajního vlákna příčného průřezu	[mm]
R _T	Poloměr zakřivení střednice (těžištní osy) křivého prutu	[mm]
S	Plocha	[mm ²]

T	Posouvající síla	[N]
T	Těžiště	
U	Vnitřní energie	[J]
u	Vektor posuvů	[mm]
U_y	Statický moment plochy	[mm ³]
X	Vektor souřadnic	[mm]
y	Vzdálenost na ose y	[mm]
z	Vzdálenost libovolného vlákna od neutrální osy	[mm]
z_0	Vzdálenost střednice od neutrální osy	[mm]
Δds	Prodloužení libovolného vlákna	[mm]
$\Delta d\varphi$	Rozdíl úhlu $d\varphi$ před deformací a po deformaci	[°]
Δk_t	Odchylka součinitele bezpečnosti v tahu	[%]
$\Delta\sigma$	Odchylka napětí	[%]
ε	Poměrné prodloužení	[1]
Π	Celková potenciální energie	[J]
ρ	Poloměr zakřivení libovolného vlákna	[mm]
σ	Normálové napětí	[MPa]
σ_{Dd}^{II}	Dovolené tlakové napětí v průřezu II - II	[MPa]
σ_d^{II}	Tlakové napětí v průřezu II - II	[MPa]
σ_{Dt}^I	Dovolené tahové napětí v průřezu I – I	[MPa]
σ_{Dt}^{II}	Dovolené tahové napětí v průřezu II - II	[MPa]
σ_o	Ohybové napětí	[MPa]
$\sigma_{o \max}$	Maximální ohybové napětí	[MPa]
$\sigma_{o \min}$	Minimální ohybové napětí	[MPa]
σ_t^I	Tahové napětí v průřezu I - I	[MPa]
σ_t^{II}	Tahové napětí v průřezu II - II	[MPa]
τ	Smykové napětí	[MPa]
τ_{xy}	Smykové napětí od posouvající síly	[MPa]

Úvod

Již od dob starověkého Egypta bylo potřeba ke zdvihání a přemísťování těžkých břemen použít určité zařízení, které by lidem tuto práci alespoň trochu usnadnilo. Při aplikaci těchto zdvihacích zařízení pak bylo možné působit na těleso menší silou, ale po delší dráze. Práce, kterou bylo nutné vykonat na přemístění břemene, zůstává konstantní, mění se jen dráha a síla. Čím větší dráha, tím menší potřebná síla. Právě tohoto principu využívali starověcí stavitelé. Při stavbě historických monumentů se používaly různé kluzné rampy a pákové mechanismy, později i jeřáby. První vynález jeřábu, o který se zasloužili Řekové, historikové datují kolem 6. - 5. století před naším letopočtem. Zatím hovoříme ale o velmi primitivním zařízení, jeřáb byl zpočátku jen lano položené přes kladku. Tuto historickou technologii později využívali i Římané. [4]

V současné době existuje mnoho druhů jeřábů jako například mobilní (autojeřáb), lodní, mostový, portálový, věžový, kolejový a člunový. Jeřáby se používají v nejrozličnějších odvětvích průmyslu (převážně v těžkém průmyslu), stavebnictví, dopravě atd. [5] Mezi základní části jeřábu patří jeřábový motor a brzda (spouštěcí nebo stavící), jeřábová dráha, jeřábový most, jeřábová kočka (zdvihací zařízení jeřábu), lano a hák. [6]

Záměr práce je právě pevnostní výpočet jeřábového háku jak numericky pomocí MKP, tak analyticky, a porovnání obou výsledků pevnostního výpočtu. Práce bude rozdělena na sedm kapitol.

První kapitola je zaměřena na obecnou problematiku jeřábového háku. Bude se řešit volba materiálu, tvar a závit háku.

Ve druhé kapitole bude popsána problematika křivých prutů, rozdíl mezi silně a slabě zakřiveným prutem a ohyb silně zakřivených prutů, kde budou odvozeny důležité vztahy pro následující analytický výpočet dle teorie křivých prutů.

Ve třetí kapitole bude proveden rozbor namáhání jeřábového háku. Z hlediska namáhání budou řešeny tři průřezy háku

Ve čtvrté kapitole bude hák analyticky počítán z hlediska pevnosti. Výpočet pro druhý průřez bude proveden dvěma metodami – výpočet dle [1] a výpočet dle teorie křivých prutů. Výsledky obou metod budou posléze porovnávány.

V páté kapitole bude jednoduše popsán postup a princip metody konečných prvků.

V šesté kapitole bude proveden numerický výpočet háku v programu Ansys.

Poslední kapitola bude zahrnovat porovnání výsledků analytického a numerického řešení, tedy porovnání výsledků obou metod analytického výpočtu s výsledkem MKP.

1. Jeřábový hák

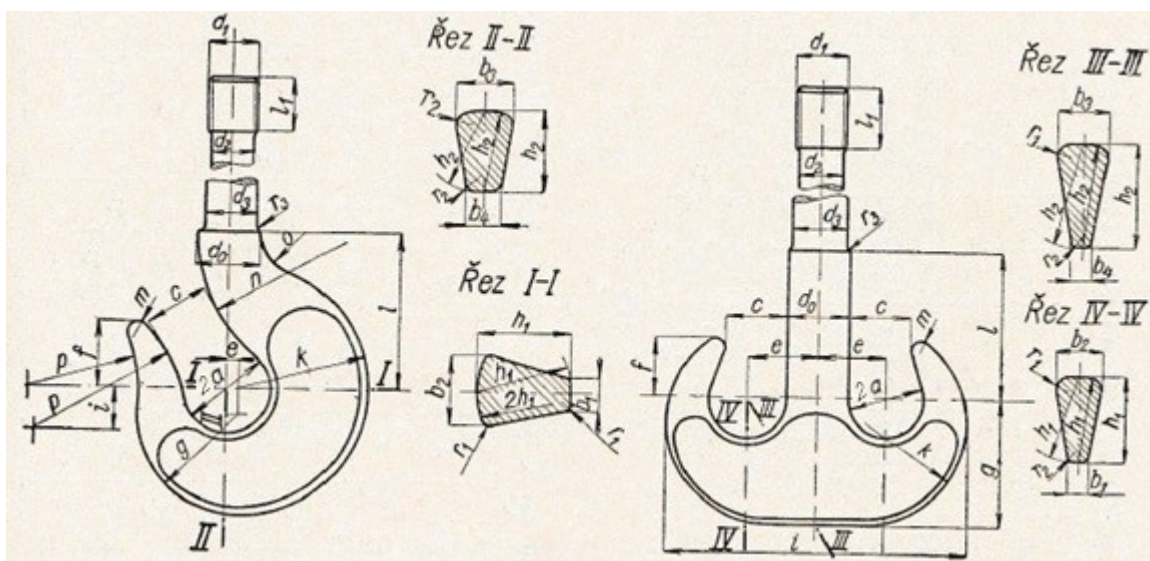
1.1 Materiál háku

Hlavním požadavkem na materiál jeřábových háků je jeho dobré zpracování za tepla kování. Měl by mít i dostatečnou pevnost v tahu a být houževnatý při nárazovém provozu. Nejčastěji se používá ušlechtilá ocel ČSN 12020.1. Jedná se o konstrukční ocel k cementování, jejíž pevnost se pohybuje mezi 420 až 500 MPa a mez kluzu je rovna 235 MPa. Patří mezi velmi dobře svařitelné materiály. Používá se na méně namáhané cementované součásti, např. čepy, pouzdra, šrouby, vačkové hřídele, ozubená a řetězová kola, lisované součásti a některé nástroje a měřidla. Ve stavu normalizačně žíhaném a popouštěném se používá na velké výkovky do 1000 kg a tloušťky do 1000 mm. [1], [8]

Z obyčejných strojních ocelí se využívá jen ocel ČSN 11376.1, která se vyznačuje velmi dobrou tvárností. Strojní oceli s vyšší pevností než 420 MPa se už nehodí pro jeřábové háky, protože mají příliš malou tažnost, což je nežádoucí. [1]

1.2 Tvar háků

Obecně jsou háky rozděleny podle tvaru na jednoduché a dvojité. Tato problematika je popsána již v několika normách jako například německé normy DIN 15401 pro jednoduché a DIN 15402 pro dvojité kované jeřábové háky. V České republice se tvarem háků zabývaly normy ČSN 27 1902 pro jednoduché a ČSN 27 1903 pro dvojité kované jeřábové háky. Tyto ČSN normy platily od roku 1964 do 2006. V roce 2006 byly zrušeny bez náhrady. [9], [10]



Obrázek 1.1 – Dva typy jeřábových háků [1] (upraveno)

Dále budou popsány tvary háků dle [1]. Jednoduché háky se používají obvykle pro malé a střední nosnosti, dvojité háky pro velké nosnosti. Jednoduché háky jsou pouze kované. Dvojité jsou kované nebo lamelové, záleží na nosnosti háku – do nosnosti 80 t jsou kované, přes 80 t do 125 t kované nebo lamelové, přes 125 t jen lamelové. V tabulkách 1.1 a 1.2 jsou uvedeny rozměry jeřábových háků podle Výzkumného ústavu dopravní a úpravárenské techniky v Plzni (VÚDÚT). [1]

Tabulka 1.1 – Rozměry jeřábových háků (podle VÚDÚT)¹ [1] (upraveno)

Hák	Nosnost [t]	a	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	c	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	e	f	g
Jednoduchý	5	45	30	80	67	40	75	60	M48X5	41,5	52	5	70	114
	8	55	40	100	80	46	85	80	M64X6	56	68	5	85	132
	12,5	65	45	125	95	60	105	88	M72X6	64	76	10	95	152
	20	80	60	145	115	70	130	112	Tr90X12	77	95	10	120	192
Dvojitý	32	80	44	110	115	40	130	132	Tr110X12	97	115	146	120	270
	50	100	52	140	149	50	160	160	Tr130X14	114	140	180	150	330

Tabulka 1.2 - Rozměry jeřábových háků (podle VÚDÚT)¹ [1] (upraveno)

Hák	Nosnost [t]	h ₁	h ₂	i	k	l	l ₁	m	n	o	p	r ₁	r ₂	r ₃	Hmotnost [kg]
Jednoduchý	5	105	88	37	135	175	60	12	160	50	160	10	14	4	19
	8	125	108	58	164	206	70	15	210	58	200	10	20	6	29
	12,5	145	121	87	188	252	90	17	250	75	250	15	25	6	59
	20	175	150	100	232	307	105	25	300	100	300	20	30	8	106
Dvojitý	32	183	226	620	220	312	125	25	-	-	-	30	20	10	134
	50	224	276	780	265	387	155	30	-	-	-	40	25	10	245

Pro pevnostní výpočet byl vybrán jednoduchý hák s nosností 8 t. Jeho rozměry jsou v tabulkách vyznačeny tučně.

Délka háku se navrhuje pokud možno co nejmenší, jinak by se zmenšoval zdvih, a je ovlivněna zejména konstrukcí kladnice. Vůle mezi špičkou háku a kladnicí musí mít přinejmenším stejnou velikost, jako je velikost rozevření háku. Velikost rozevření háku $2a$ se obvykle volí jako dvojnásobek průměru konopného lana d , na které by bylo možné pověsit břemeno o hmotnosti m . [1]

¹ Délkové rozměry jsou v mm.

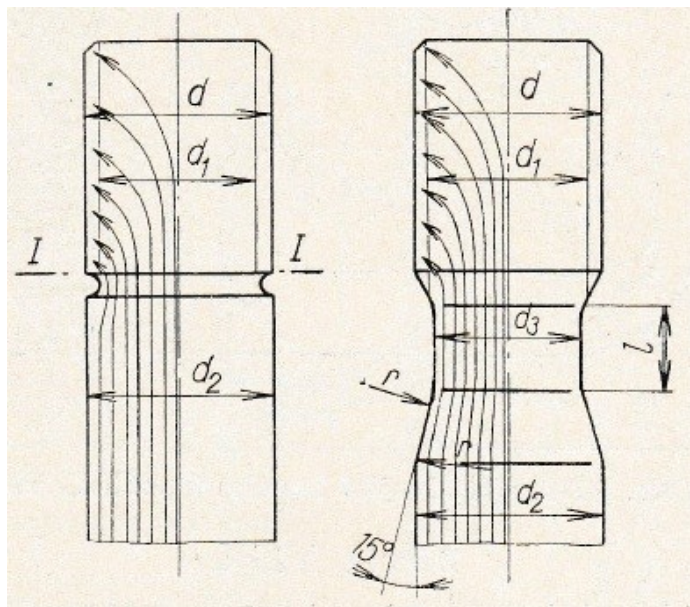
1.3 Závit háku

Důležitou částí háku je závit pro zavěšení a jeho přechod do dříku. Závit může být metrický (do nosnosti 12,5 t včetně) nebo oblý, popř. lichoběžníkový (pro háky s větší nosností). Pokud se dříve nebrala v úvahu únava materiálu, přechod mezi průměry d_1 a d_2 byl řešen krátkým krčkem, což ale mělo za následek velmi časté přetržení háku po delší době (10–15 let) v provozu, k přetržení obvykle došlo na začátku závitu. Tahové namáhání v jádře staticky zatížených závitů obvykle nepřesahovalo 50 MPa. Struktura lomu byla velmi jemná, což znamenalo, že se jedná o únavový lom. Přechod závitu do dříku musí být tedy plynulý a bez zápichů, aby k tomuto jevu nedocházelo. [1], [11]

Příčinou lomu byly hlavně účinky vrubové od ostrého zápichu závitu spojené s přetěžováním háku jak statickou silou, tak i dynamickou silou vyvolanou rázy od náhlého zabrzdění jeřábu nebo kvůli špatnému zacházení. Skoková změna průřezu d_2 na d_1 je další příčinou náhlého lomu. V krajních vláknech dojde vlivem vrubového účinku ke zvýšení napětí. Změna průřezu způsobí i velké rázové napětí. Krátký krček není schopen absorbovat tak velkou nárazovou práci. [1]

Vzhledem k častým lomům se háky s ostrým přechodem závitu častěji kontrolují a zjišťují se povrchové trhliny pomocí nedestruktivních zkoušek - např. zkouška petrolejem (kapilární zkouška) nebo zkouška elektromagnetická, kdy se k indikaci trhlín využívá změny magnetického toku. [1]

Protože je hák s ostrým přechodem závitu neefektivní z hlediska únavy materiálu, pomalu se od jeho výroby ustupuje a ostrý přechod se nahrazuje plynulým přechodem závitu, díky kterému se jak zmenší vrubový účinek, tak rovnoměrněji rozdělí napětí na celý průřez v krčku. Zvýší se i možná nárazová práce absorbovaná krčkem. Krček tak může do určité míry tlumit rázy, takže špičkové napětí by nemělo dosahovat kritických hodnot. [1]



Obrázek 1.2 – Dva typy přechodu mezi průměry [1]

2. Křivé pruty

Křivými pruty nazýváme zakřivené elementy konstrukcí. Prutem můžeme nazvat součást, u níž převládá délkový rozměr nad rozměry příčného průřezu. Jejich tvar je určen tvarem střednice a tvary průřezů v jednotlivých bodech střednice. Střednice je spojnice všech těžišť příčných průřezů. Podle statické určitosti můžeme pruty rozdělit na staticky určité a staticky neurčité. Dále existují i pruty staticky neurčité vnitřní – tzv. rámové konstrukce. Dle způsobu zatížení a zakřivení lze dělit pruty na rovinné nebo prostorové. Rovinné křivé pruty se vyznačují tím, že jejich střednice leží spolu s působícími silami ve stejné rovině. Významným parametrem, který určuje, zda se jedná o tenké nebo tlusté křivé pruty, je jejich zakřivení. Zakřivení křivých prutů je definováno poměrem R_T/h - poloměr zakřivení střednice k výšce profilu. Splňuje-li tento poměr podmínku

$$R_T/h \geq 5, \quad (2.1)$$

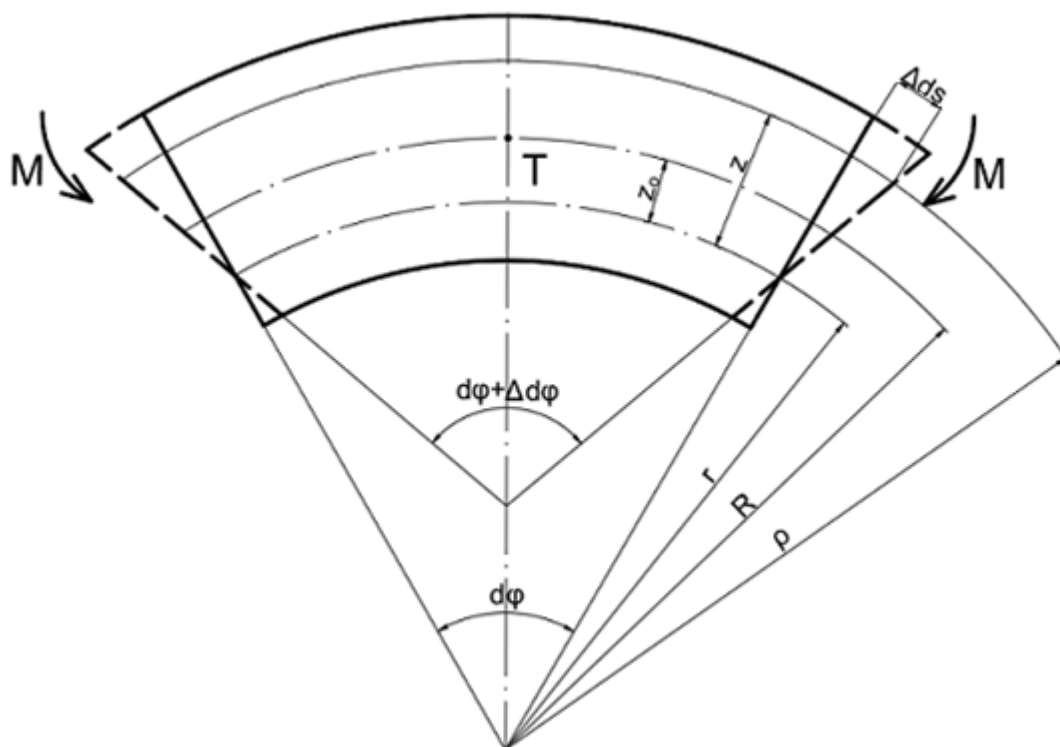
(některá literatura uvádí i $R_T/h \geq 6$) pak se jedná o tenký křivý prut (používá se také označení slabě zakřivený). Příčné rozměry tenkého křivého prutu jsou vzhledem k poloměru zakřivení malé. Vycházíme zde z předpokladu, že pro slabě zakřivené pruty můžeme použít stejné rozložení napětí jako pro přímé pruty. Neutrální osa, což je osa s nulovým napětím, prochází těžištěm příčného průřezu a napětí jsou úměrná vzdálenosti od neutrální osy. Pokud naopak vyhovuje poměr podmínce

$$R_T/h < 5, \quad (2.2)$$

(některá literatura uvádí i $R_T/h < 6$) hovoříme o tlustém křivém prutu (rovněž se používá označení silně zakřivený). Zde již nemůžeme předpokládat stejné rozložení napětí jako u přímých prutů, průběh normálových napětí od ohybu je nelineární. Neutrální osa neprochází těžištěm průřezu. Jako příklad tlustého křivého prutu lze uvést článek řetězu nebo jeřábový hák. [2], [7]

2.1 Ohyb silně zakřivených prutů

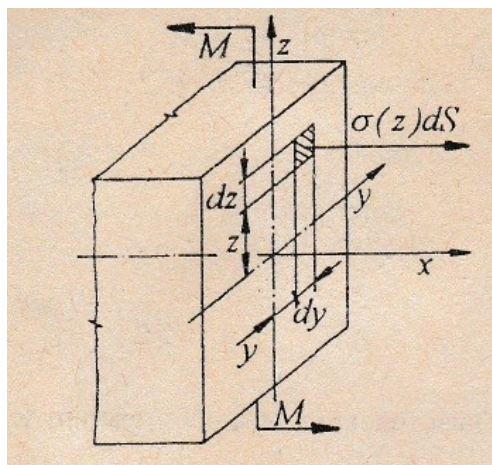
Uvažujme tlustý křivý rovinný prut s jednou osou symetrie průřezu v rovině ohybu, namáhán pouze dvojicemi momentů M . Předpokladem řešení je Navierova-Bernoulliho hypotéza, že rovinné průřezy prutu zůstávají rovinné a kolmé ke střednici i po deformaci. Uvažujeme-li namáhání prutu ohybem tak, jak je naznačeno na obrázku 2.1, tak je zřejmé, že vnitřní vlákna budou stlačována a vnější natahována. Přibližně uprostřed jsou vlákna, které nejsou namáhány ani tahem ani tlakem. Tyto vlákna tvoří neutrální plochu. Průsečnice této plochy s průřezem je označována jako neutrální osa. [2], [3]



Obrázek 2.1 – Nekonečně malá část silně zakřiveného prutu namáhaného ohybem

Na obrázku 2.1 je T označení pro těžiště, r je poloměr křivosti neutrální osy, z je vzdálenost libovolného vlákna od neutrální osy, ρ je poloměr zakřivení libovolného vlákna, z_0 je vzdálenost střednice od neutrální osy, Δds je prodloužení libovolného vlákna způsobené deformací křivého prutu, $d\varphi$ je úhel, který svírají příčné průřezy nekonečně malé části křivého prutu před deformací, a $\Delta d\varphi$ je rozdíl tohoto úhlu před deformací a po deformaci. [2], [3]

Abychom mohli zkoumat napjatost v průřezu, musíme provést myšlený řez v radiálním směru. Prut myšleným řezem rozdělíme na dvě části, jednu část odstraníme a účinek odstraněné části nahradíme vnitřními silovými účinky. [2], [3]



Obrázek 2.2 - Řez prutem v radiálním směru [2]

Na obrázku 2.2 je zobrazen účinek oddělené pravé části momentem vnitřních sil. Pro levou část prutu lze napsat tyto podmínky rovnováhy

$$\sum F_x = 0, \quad \int_{(S)} \sigma(z) dS = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\sum M_y = 0, \quad M - \int_{(S)} \sigma(z) z dS = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\sum M_z = 0, \quad \int_{(S)} \sigma(z) y dS = 0, \quad (2.3.3)$$

kde σ je napětí, F je síla, S je plocha, y vzdálenost na ose y a z vzdálenost na ose z .

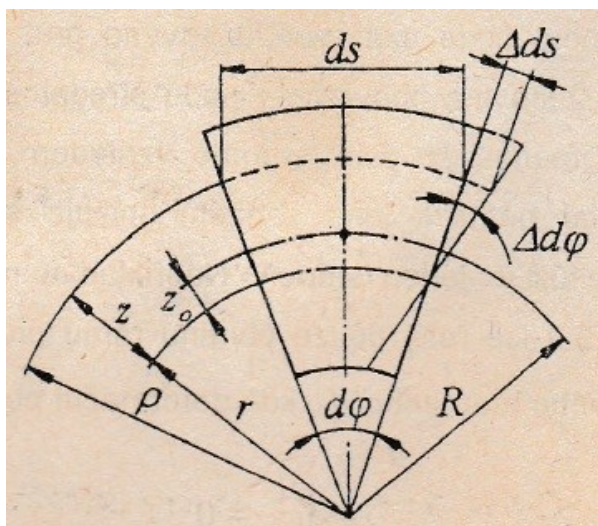
Deformaci můžeme popsat poměrným prodloužením ε , které udává poměr prodloužení libovolného vlákna k počáteční délce tohoto vlákna, což lze dle obrázku 2.3 vyjádřit jako

$$\varepsilon(z) = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{z \Delta d\varphi}{(r+z) d\varphi}. \quad [2] \quad (2.4)$$

Pokud předpokládáme jednoosou napjatost a napětí, které nepřekročí mez kluzu, použijeme pro vyjádření napětí Hookův zákon, kdy platí

$$\sigma(z) = E \varepsilon(z) = E \frac{z \Delta d\varphi}{(r+z) d\varphi}, \quad (2.5)$$

kde E je modul pružnosti v tahu (nebo také Youngův modul), jehož hodnota je pro konstrukční ocel přibližně 210 GPa. Ze vztahu (2.5) lze vyvodit, že normálové napětí má hyperbolický průběh. [2]



Obrázek 2.3 – Náčrt k odvození poměrného prodloužení [2]

Cílem je odvodit vztah pro poloměr křivosti neutrální osy. V průřezu nepůsobí normálová síla, takže součet normálových sil přes celou plochu průřezu musí být roven nule. Po dosazení (2.5) do (2.3.1) získáme vztah

$$\int_{(S)} \sigma(z) dS = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_{(S)} \frac{z}{r+z} dS = 0, \quad (2.6)$$

kde jsou veličiny $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ a E konstantní nenulová čísla, proto musí platit

$$\int_{(S)} \frac{z}{r+z} dS = 0, \quad (2.7.1)$$

$$\int_{(S)} \frac{z}{\rho} dS = 0. \quad (2.7.2)$$

Vztah dále upravíme:

$$\int_{(S)} \frac{z+r-r}{\rho} dS = \int_{(S)} \frac{z+r}{\rho} dS - \int_{(S)} \frac{r}{\rho} dS = \int_{(S)} \frac{\rho}{\rho} dS - \int_{(S)} \frac{r}{\rho} dS = 0, \quad (2.8)$$

$$S - r \int_{(S)} \frac{1}{\rho} dS = 0. \quad (2.9)$$

Poloměr křivosti neutrální osy je roven

$$r = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{dS}{\rho}} \quad [2], [3] \quad (2.10)$$

Po dosazení (2.5) do (2.3.2) získáme vztah

$$M - E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_{(S)} \frac{z^2}{r+z} dS = 0, \quad (2.11)$$

ze kterého vyplývá, že elementární síly $\sigma(z)dS$ mají stejný statický účinek jako silová dvojice, jejíž moment se rovná ohybovému momentu M . Integrál ze vztahu (2.11) lze ještě upravit:

$$\int_{(S)} \frac{z^2}{r+z} dS = \int_{(S)} z \frac{z+r-r}{r+z} dS = \int_{(S)} z dS - r \int_{(S)} \frac{z}{r+z} dS, \quad (2.12)$$

kde dle vztahu (2.7.1) lze (2.12) zjednodušit na

$$\int_{(S)} z dS - r \cdot 0 = \int_{(S)} z dS = U_y, \quad (2.13)$$

kde U_y je statický moment plochy příčného průřezu, pro který také platí

$$U_y = S(R - r), \quad (2.14)$$

kde S je plocha příčného průřezu, R je poloměr křivosti těžiště průřezu a r je poloměr křivosti neutrální osy. Po dosazení (2.13) do (2.11) dostáváme

$$M - E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} U_y = 0 \quad (2.15)$$

a po úpravě

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EU_y}. \quad (2.16)$$

Po dosazení (2.16) do (2.5) získáme vztah pro normálové napětí

$$\sigma(z) = \frac{M}{U_y} \frac{z}{r+z} = \frac{M}{U_y} \frac{z}{\rho}. \quad (2.17)$$

Statický moment lze také vyjádřit vztahem

$$U_y = Sz_0. \quad (2.18)$$

Po dosazení (2.18) do (2.17) získáme další vyjádření normálového napětí

$$\sigma(z) = \frac{M}{Sz_0} \frac{z}{\rho}. \quad [2], [3] \quad (2.19)$$

Po dosazení vztahu pro napětí (2.5) do třetí podmínky rovnováhy (2.3.3) získáme vztah

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_{(S)} E \frac{z}{r+z} y dS = 0, \quad (2.20)$$

který musí být vždy splněn, protože plocha příčného průřezu silně zakřiveného prutu je symetrická podle osy z. [2]

2.2 Podmínka pevnosti silně zakřivených prutů

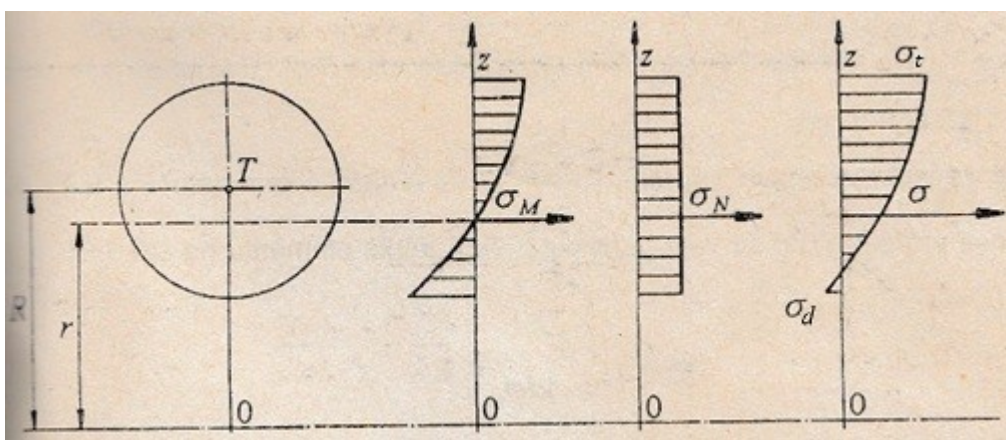
Pokud je prováděna pevnostní kontrola zakřivených prutů, musí být předem stanoveno, jak je prut, resp. nebezpečný průřez namáhán a zda musíme brát v úvahu namáhání od všech tří vnitřních statických účinků, tedy od normálové síly N , posouvající síly T a ohybového momentu M . [2]

U některých aplikací je možno zanedbat namáhání od posouvající síly T , resp. vliv smykového napětí τ . Nebezpečný průřez je pak namáhán kombinovaným namáháním ohyb-tah/tlak, jak je naznačeno na obrázku 2.4. Podmínka pevnosti pro tah a tlak bez uvážení smykových napětí vypadá následovně:

$$\sigma_t \leq \sigma_{Dt}, \quad (2.21)$$

$$\sigma_d \leq \sigma_{Dd}, \quad (2.22)$$

kde σ_{Dt} je dovolené napětí v tahu a σ_{Dd} dovolené napětí v tlaku, σ_t výsledné tahové napětí na vnější straně zakřiveného prutu a σ_d výsledné tlakové napětí na vnitřní straně zakřiveného prutu. Výsledné napětí v tahu σ_t , resp. v tlaku σ_d je dáno součtem ohybového a normálového napětí. [2]



Obrázek 2.4 – Průběhy ohybového, normálového a výsledného napětí [2]

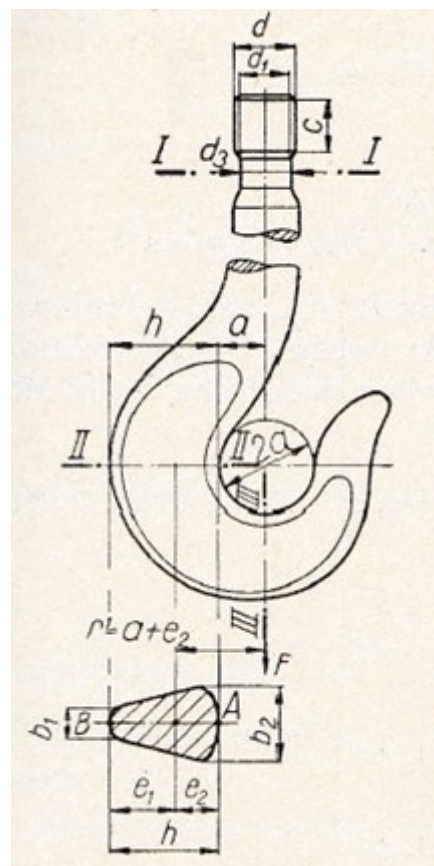
Pokud vliv smykových napětí není možno zanedbat, provádí se pevnostní kontrola v bodě, který je nejvíce namáhán, podle teorií pevnosti. [2]

3. Rozbor namáhání jeřábového háku

Předpokládáme, že materiál háku je homogenní a izotropní, což znamená, že každá část tělesa má stejné mechanické vlastnosti jako jiná část a ve všech směrech jsou stejné mechanické vlastnosti. [3]

Rozbor namáhání bude proveden dle obrázku 3.1 postupně pro průřez I – I, II – II a III – III. Na jeřábový hák působí ve svislé ose směrem dolů síla F představující břemeno zavěšené na háku.

Závitová část háku je uchycena v matici, která je pojištěna závlačkou. Nahoře matice je drážka pro příložku, která brání otáčení háku. Toto uložení je ve výpočtovém modelu nahrazeno dokonalým vetknutím, které tělesu v rovině odebrává 3 stupně volnosti, resp. v prostoru 6 stupňů volnosti. Dokonalé vetknutí odebrává tělesu všechny stupně volnosti, hák tedy nemůže konat žádný nezávislý pohyb – je staticky určitý. [1]



Obrázek 3.1 – Jeřábový hák [1] (upraveno)

3.1 Průřez I - I

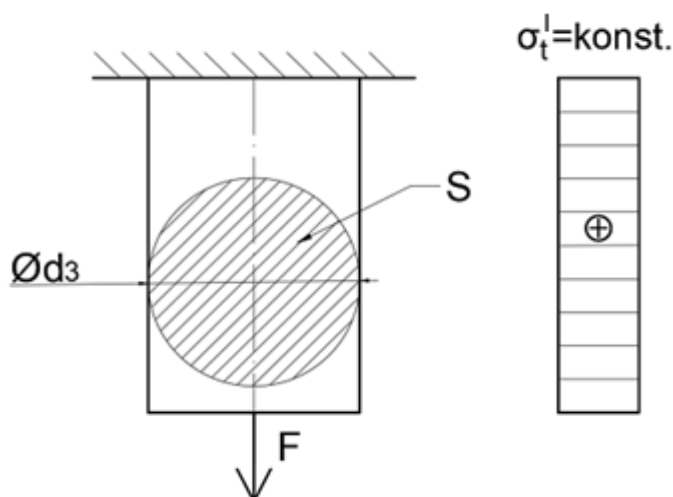
Síla F působí v těžišti průřezu I – I. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že síla F (akce) vyvolá stejně velkou sílu opačného směru (reakci), obě přitom leží na stejné ose. Tyto dvě síly vyvolají v průřezu namáhání prostým tahem.

Napětí počítáme pro nejužší místo, protože zde je největší šance, že dojde k přetržení háku. Nebezpečným místem je krček s průměrem d_3 . Napětí je po celém průřezu rovnoměrně rozloženo. Je dáno poměrem působící normálové síly na plochu příčného průřezu.

$$\sigma_t^I = \frac{N}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d_3^2}{4}} \quad (3.1)$$

Musí být splněna pevnostní podmínka, kdy působící tahové napětí musí být menší nebo rovno dovolenému napětí v tahu. [1]

$$\sigma_t^I \leq \sigma_{Dt}^I \quad (3.2)$$



Obrázek 3.2 - Model pro výpočet napětí v tahu

Hodnota dovoleného napětí závisí jak na použitém materiálu, tak druhu provozu, ve kterém je hák používán. Pro lehký provoz jsou hodnoty dovoleného napětí mezi 38 až 70 MPa. Pro střední provoz se pohybují mezi 30 až 60 MPa, kdy se nižší hodnoty berou pro malá břemena (okolo 5 t) a větší hodnoty pro velká břemena (nad 100 t). Pro těžký provoz se hodnoty pohybují mezi 24 až 48 MPa. [1]

Výsledná bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti v tahu je pak dána součinitelem bezpečnosti, který je roven poměru mezi hodnotou meze kluzu daného materiálu a maximálním tahovým napětím v tělese.

$$k_t^I = \frac{Re}{\sigma_t^I} \quad (3.3)$$

Dle [8] se mez kluzu použitého materiálu, kterým je ocel ČSN 12020.10, pohybuje okolo 253 MPa. Pro hodnotu součinitele bezpečnosti má platit

$$k_t^I > 1. \quad (3.4.1)$$

Pokud by součinitel bezpečnosti k_t^I byl menší než 1, znamenalo by to poddimenzování součásti a součást by tedy pevnostně nevyhověla. Součinitel bezpečnosti často bývá v intervalu

$$k_t^I \in \langle 1,5; 3 \rangle, \quad (3.4.2)$$

kdy už je hodnota dostačující, ale ani není příliš velká, což by s největší pravděpodobností znamenalo, že je součást předimenzována. [12]

3.2 Průřez II – II

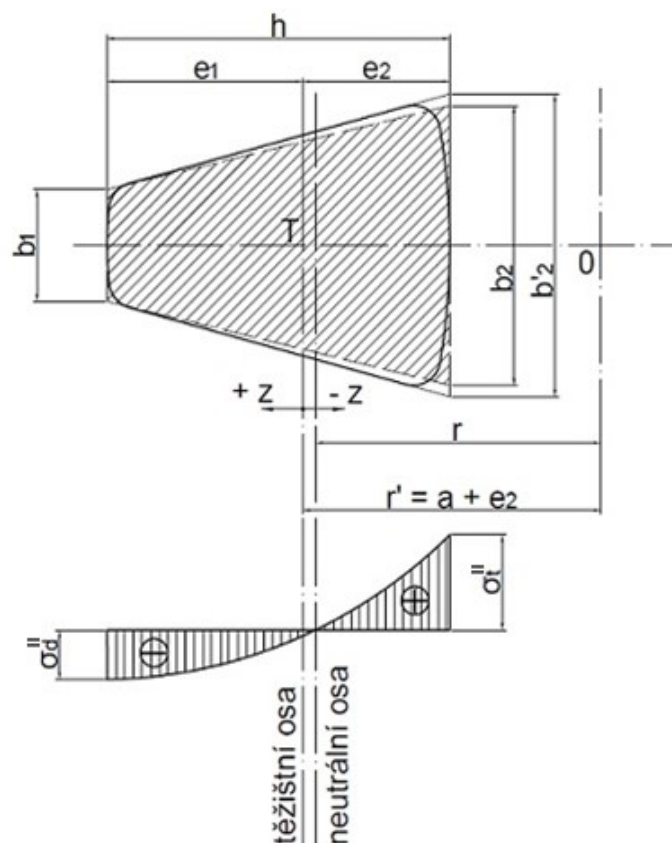
Průřez II – II je namáhán tahem a ohybem, namáhání smykem zanedbáváme (více v kapitole 3.1.3). Ohybové namáhání zde způsobuje moment síly F na rameni r' (tato hodnota představuje zároveň i poloměr křivosti těžiště průřezu II – II R_T), tahové namáhání je způsobeno samotnou silou F . Hák zde představuje nosník silně zakřivený. Namáhání průřezu II – II je řešeno dle [1]. Napětí lze vyjádřit rovnicí:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{M}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{z}{r' + z}, \quad (3.5)$$

kde N je normálová síla, r' je rameno síly, M je působící ohybový moment, z je vzdálenost libovolného vlákna od těžištní osy příčného průřezu, S je plocha zjednodušeného lichoběžníkového průřezu a c je součinitel, který závisí na tvaru průřezu a souvisí s polohou neutrální osy. Pro lichoběžníkový průřez, kterým je často pro zjednodušení nahrazen průřez jeřábového háku, je součinitel tvaru průřezu c roven

$$c = -1 + \frac{2r'}{(b_1 + b_2)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} (e_1 + r') \right] \ln \frac{r' + e_1}{r' - e_2} - (b_2 - b_1) \right\} \quad (3.6)$$

Proměnné b_1 , b_2 , e_1 , e_2 a h jsou rozměry vztahující se k průřezu II – II jeřábového háku, na obrázku 3.1 jsou zakótovány. Hodnota z je kladná na vypuklé straně střednice a záporná na duté straně střednice. Normálová síla N je kladná, pokud se jedná o sílu tahovou, a záporná, pokud o sílu tlakovou. Znaménko momentu M závisí na tom, zda se moment snaží křivý prut napřímit – zmenšit jeho křivost (pak je záporný), nebo se naopak snaží jeho křivost zvětšit (pak je kladný). [1]



Obrázek 3.3 – Průběh napětí pro průřez II – II

Výsledné napětí v průřezu II – II má hyperbolický průběh. Hyperbola nemusí být vždy symetrická podle osy y průřezu, jak je vidět na obrázku 3.3, pak ani v těžišti nemusí být nulové napětí. Nulové napětí mají body tvořící neutrální osu, vztah pro výpočet křivosti neutrální osy je uveden v rovnici (2.10). Aby neutrální osa procházela těžištěm, musí být splněna podmínka, že

$$\text{pro } z = 0 \text{ je také } \sigma = 0. \quad (3.7)$$

Pokud (3.7) dosadíme do (3.5) získáme rovnici

$$\frac{N}{S} + \frac{M}{S \cdot r'} = 0, \quad (3.8)$$

ze které vyplývá vztah pro moment

$$M = -N \cdot r'. \quad (3.9)$$

Tento vztah platí, pokud normálová síla působí ve středu zakřivení křivého prutu a snaží se ho napřímít. Tato podmínka je u jeřábového háku obvykle splněna, protože střed křivosti těžnice leží vždy alespoň přibližně ve středu vnitřního obrysového kruhu háku, kde je působiště zatěžující síly $F = N$, která působí na rameni

$$r' = a + e_2. [1] \quad (3.10)$$

Napětí v tahu pro krajní vnitřní vlákna průřezu II – II má pak tvar

$$\sigma_t^{II} = \frac{F}{S} - \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{(-M)}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{(-e_2)}{r' - e_2} = \frac{F}{S} - \frac{F \cdot r'}{S \cdot r'} + \frac{F \cdot r'}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_2}{a}, \quad (3.11)$$

$$\sigma_t^{II} = \frac{F \cdot e_2}{c \cdot S \cdot a}. \quad (3.12)$$

Napětí v tlaku pro krajní vnější vlákna průřezu II – II má tvar

$$\sigma_d^{II} = \frac{F}{S} - \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{(-M)}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_1}{r' + e_1} = \frac{F}{S} - \frac{F \cdot r'}{S \cdot r'} - \frac{F \cdot r'}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_1}{a + e_2 + e_1}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_d^{II} = -\frac{F \cdot e_1}{c \cdot S \cdot (a + h)}. \quad (3.14)$$

Výsledné napětí v tahu, resp. v tlaku musí splňovat pevnostní podmínku (2.21), resp. (2.22). Hodnoty dovoleného napětí v tahu se pohybují v rozmezí od 80 do 125 MPa pro lehký provoz, kdy se opět pro malá břemena berou hodnoty nižší a pro velká břemena vyšší. Pro těžký provoz jsou hodnoty podstatně nižší hlavně kvůli mezi únavy při míjivém zatížení. Napětí v tlaku bývá obvykle menší, takže jeho kontrola není nutná. [1]

Aby hák pevnostně vyhověl, musí být tedy splněna podmínka pevnosti v tahu

$$\sigma_t^{II} \leq \sigma_{Dt}^{II}. \quad (3.15)$$

Pro ověření pevnosti můžeme použít i výpočet bezpečnosti, která je dána součinitelem bezpečnosti. Bude nás obvykle zajímat jen hodnota součinitele bezpečnosti pro tah, protože tlakové napětí je zpravidla menší než tahové, takže je součinitel bezpečnosti v tlaku větší než v tahu. Pro tah je součinitel bezpečnosti roven

$$k_t^{II} = \frac{R_e}{\sigma_t^{II}}. \quad [12] \quad (3.17)$$

3.3 Průřez III – III

V tomto průřezu nepůsobí ohybové napětí σ_o , protože rameno síly F je rovno nule, takže i ohybový moment M je roven nule. Síla F v průřezu III – III představuje posouvající sílu, která zde vyvolává smykové napětí τ_{xy} . Toto smykové napětí lze vyjádřit Žuravského vztahem

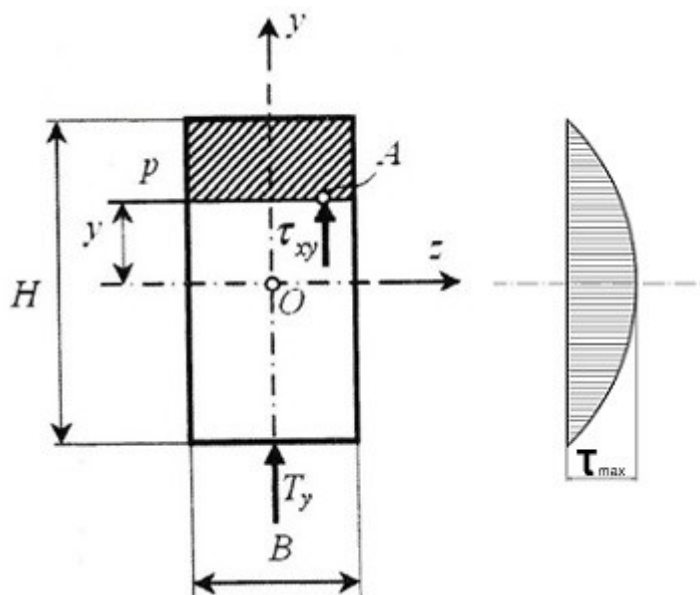
$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot U_y}{J_z \cdot B}, \quad (3.18)$$

kde τ_{xy} je smykové napětí, T_y je posouvající síla působící v ose y příčného průřezu, U_y je statický moment plochy, která je na obrázku 3.4 vyšrafovaná, J_z je osový moment

setrvačnosti plochy příčného průřezu k ose z a B šířka příčného průřezu namáhaného tělesa. [13]

Smykové napětí má u obdélníkového průřezu rozložení symetrické, jak je vidět na obrázku 3.4. Na povrchu je vždy nulové, naopak ve středu průřezu dosahuje jeho hodnota maxima. Po šířce průřezu je smykové napětí rozloženo rovnoměrně. Jeho maximální hodnota se vypočítá ze vztahu

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{S}. \quad (3.19)$$



Obrázek 3.4 – Průběh smykového napětí [13] (upraveno)

U většiny pevnostních výpočtů křivých prutů je možno smykové napětí zanedbat, protože jeho velikost je oproti normálovému či ohybovému napětí malá, jak je tomu i u případu tohoto jeřábového háku. Vliv smykového napětí tedy nebude brán v úvahu.

4. Analytický výpočet jeřábového háku

V níže uvedené tabulce 4.1 jsou sepsány rozměry háku a další podstatné hodnoty pro následující analytický výpočet.

Tabulka 4.1 - Rozměry jeřábového háku nosnosti 8 tun² [1] (upraveno)

Nosnost kg	a	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	c	d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	e	f	g
8000	55	40	100	80	46	85	80	M64X6	56	68	5	85	132
h ₁	h ₂	i	k	l	l ₁	m	n	o	p	r ₁	r ₂	r ₃	Hmotnost [kg]
125	108	58	164	206	70	15	210	58	200	10	20	6	29

Působící síla F se odvíjí od dané nosnosti háku. Její velikost vychází ze vztahu

$$F = 8000 \cdot g = 8000 \cdot 9,80665 = 78\,453,2 \cong 80\,000\,N, \quad (4.1)$$

kde g je tíhové zrychlení. Při zaokrouhlení na desítky kilonewtonů směrem nahoru získáme hodnotu síly 80 000 N.

Jeřábový hák je z konstrukční oceli ČSN 12020.1, jejíž parametry jsou uvedeny níže v tabulce 4.2. Jedná se o ocel s dobrou tavnou svařitelností. [8]

Tabulka 4.2 – Parametry materiálu ČSN 12020.1 [8]

Označení materiálu	Mechanické vlastnosti			Třída odpadu
	R _m [MPa]	R _{e min} [MPa]	tvrdost HB	
12 020.1	420 až 500	235	max. 163	7

V následující tabulce 4.3 jsou uvedena zvolená dovolená napětí v tahu pro jednotlivé průřezy. Napětí byla volena dle [1]. Vychází se z předpokladu, že provoz háku je střední.

Tabulka 4.3 – Dovolená napětí v tahu pro jednotlivé průřezy dle [1]³

Průřez I - I	Průřez II - II
σ_{Dt}^I	σ_{Dt}^{II}
45	100

² Délkové rozměry jsou udávány v mm.

³ Hodnoty napětí jsou udávány v MPa.

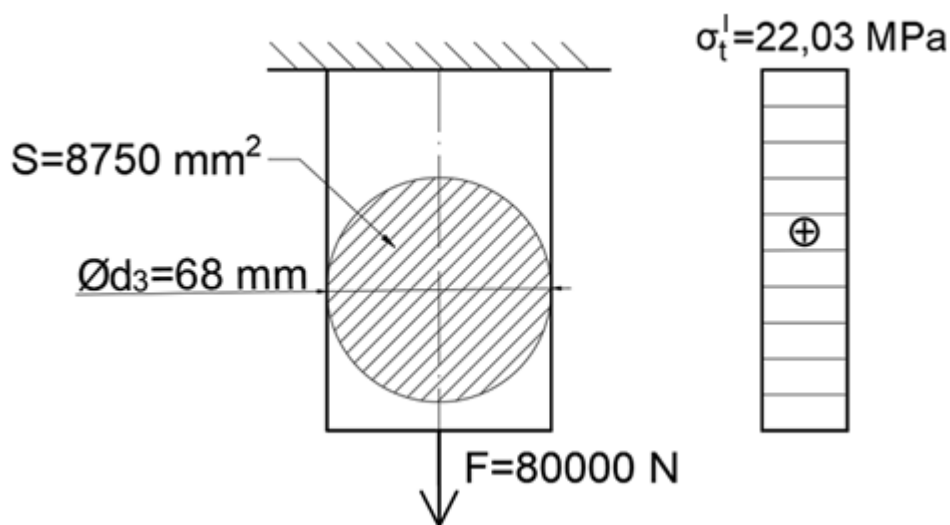
4.1 Výpočet napětí a bezpečnosti pro průřez I – I

Průřez I – I je namáhán tahovým napětím. Toto napětí lze spočítat ze vztahu (3.1)

$$\sigma_t^I = \frac{N}{S}, \quad (4.2)$$

$$\sigma_t^I = \frac{F}{\frac{\pi d_3^2}{4}}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_t^I = \frac{80000}{\frac{\pi \cdot 68^2}{4}} \doteq 22,03 \text{ MPa}. \quad (4.4)$$



Obrázek 4.1 – Výpočet napětí pro průřez I - I

Hodnota musí vyhovět pevnostní podmínce (3.2), což výše vypočtené tahové napětí splňuje.

$$\sigma_t^I \leq \sigma_{Dt} \quad (4.5)$$

$$22,03 \text{ MPa} < 45 \text{ MPa} \quad (4.6)$$

Pro kontrolu bude proveden pro každý průřez i výpočet součinitele bezpečnosti, který je dán vztahem (3.3)

$$k_t^I = \frac{Re}{\sigma_t^I}, \quad (4.7)$$

$$k_t^I = \frac{235}{22,03} = 10,67. \quad (4.8)$$

Průřez I – I tedy dle splnění pevnostní podmínky (4.5) i dost velké hodnoty součinitele bezpečnosti k_t^I (4.8) pevnostně vyhovuje.

4.2 Výpočet napětí a bezpečnosti pro průřez II – II

4.2.1 Výpočet dle [1]

Napětí v průřezu je počítáno dle [1]. Vychází se z rovnice (3.5)

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{M}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{z}{r' + z} \quad (4.9)$$

pro obecné napětí v kterémkoli místě příčného průřezu. Předmětem výpočtu je maximální tahové a tlakové napětí v krajních vláknech příčného průřezu. [1]

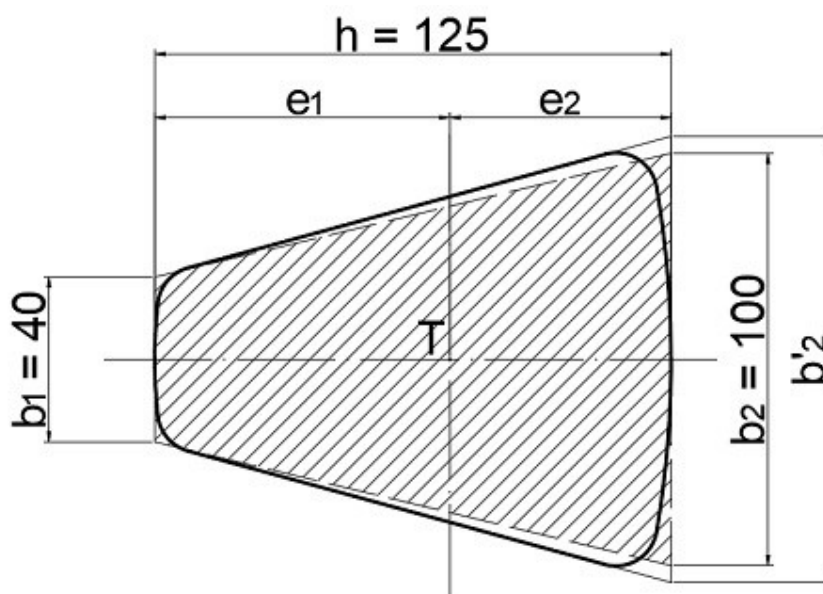
Nejdříve je ale potřeba určit další dvě hodnoty pro výpočet. Musí se vypočíst hodnota součinitele tvaru průřezu c , který souvisí s polohou neutrální osy, podle vzorce (3.6)

$$c = -1 + \frac{2r'}{(b_1 + b_2)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} (e_1 + r') \right] \ln \frac{r' + e_1}{r' - e_2} - (b_2 - b_1) \right\}, \quad (4.10)$$

$$c = -1 + \frac{2 \cdot 108,57}{(40 + 100) \cdot 125} \left\{ \left[40 + \frac{60}{125} (71,43 + 108,57) \right] \ln \frac{108,57 + 71,43}{108,57 - 53,57} - 60 \right\}, \quad (4.11)$$

$$c \doteq 0,11503. [1] \quad (4.12)$$

Dále je potřeba vypočíst obsah lichoběžníku, kterým je nahrazen tvar průřezu jeřábového háku. Tento lichoběžník je na obrázku 4.2 vyšrafován a jsou zakótovány a uvedeny všechny rozměry nutné pro výpočet jeho obsahu.



Obrázek 4.2 – Výpočet obsahu lichoběžníku [1]⁴

⁴ Délkové rozměry jsou v mm.

Obsah je dán vzorcem

$$S = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = \frac{40 + 100}{2} \cdot 125 = 8\,750 \text{ mm}^2 \quad (4.13)$$

Tahové napětí získáme tak, že do vztahu pro obecné napětí dosadíme za normálovou sílu N kladnou sílu F , protože síla F v průřezu II – II představuje sílu tahovou, a za hodnotu z vzdálenost vnitřního krajního vlákna příčného průřezu e_2 s minusovým znaménkem, protože počítáme napětí pro místo na duté straně střednice. Ohybový moment M se dosazuje také s mínusem, protože se moment snaží křivý prut napřímit, a tak zmenšit jeho křivost. Vztah pro maximální tahové napětí v krajním vlákně pak vypadá následovně

$$\sigma_t^{II} = \frac{F}{S} - \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{(-M)}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{(-e_2)}{r' - e_2} = \frac{F}{S} - \frac{F \cdot r'}{S \cdot r'} + \frac{F \cdot r'}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_2}{a}. \quad (4.14)$$

Po úpravě dostáváme

$$\sigma_t^{II} = \frac{F \cdot e_2}{c \cdot S \cdot a}. \quad (4.15)$$

Dosazením proměnných získáme hodnotu maximálního tahového napětí

$$\sigma_t^{II} = \frac{80000 \cdot 53,57}{0,11503 \cdot 8750 \cdot 55} \doteq 77,42 \text{ MPa}. [1] \quad (4.16)$$

Pro výpočet tlakového napětí se rovnice (4.9) musí upravit tak, že za normálovou sílu N dosadíme opět sílu F a za hodnotu z vzdálenost vnějšího krajního vlákna příčného průřezu e_1 s kladným znaménkem, protože počítáme napětí pro místo na vypuklé straně střednice. Ohybový moment zůstává záporný. Vztah pro maximální tlakové napětí v krajním vlákně pak vypadá takto

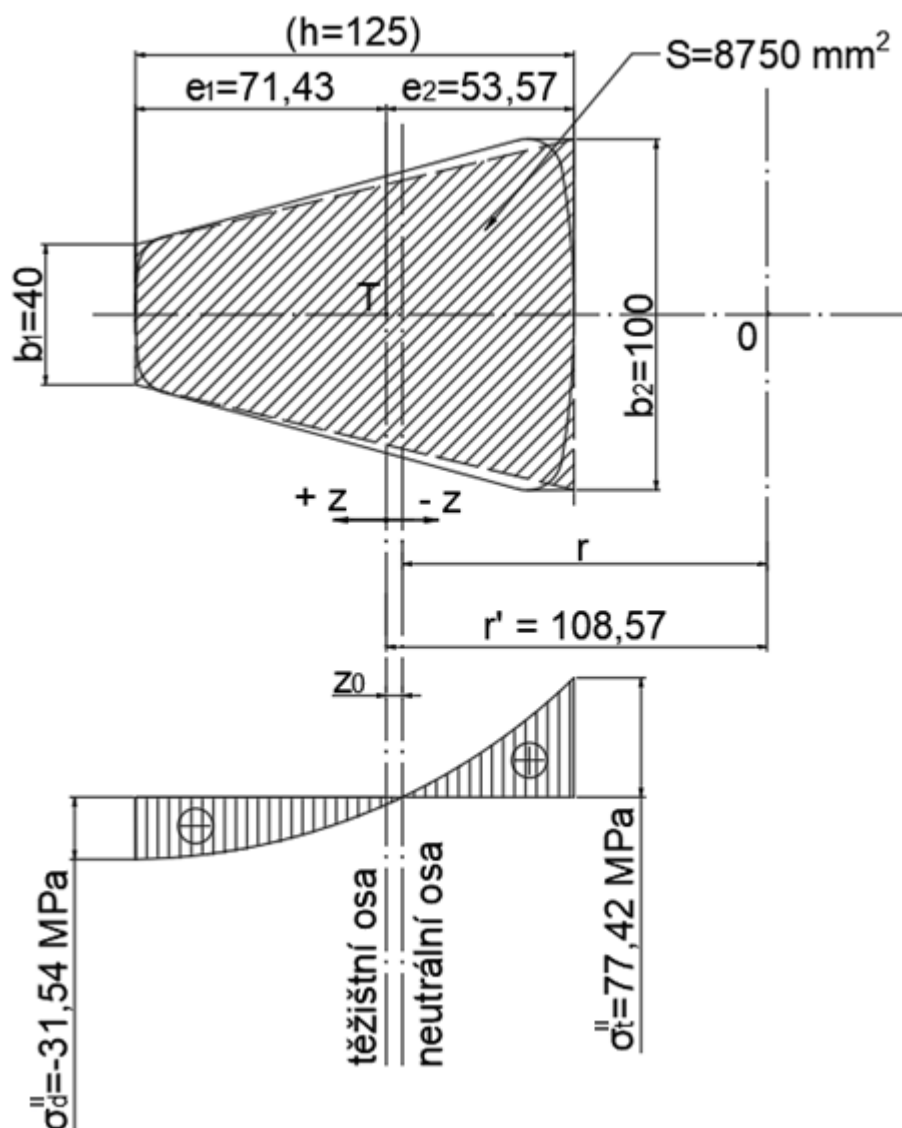
$$\sigma_d^{II} = \frac{F}{S} - \frac{M}{S \cdot r'} + \frac{(-M)}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_1}{r' + e_1} = \frac{F}{S} - \frac{F \cdot r'}{S \cdot r'} - \frac{F \cdot r'}{c \cdot S \cdot r'} \cdot \frac{e_1}{a + e_2 + e_1}. \quad (4.17)$$

Po úpravě dostáváme

$$\sigma_d^{II} = - \frac{F \cdot e_1}{c \cdot S \cdot (a + h)}. \quad (4.18)$$

Dosazením proměnných získáme hodnotu maximálního tlakového napětí

$$\sigma_d^{II} = - \frac{80000 \cdot 71,43}{0,11503 \cdot 8750 \cdot (55 + 125)} = -31,54 \text{ MPa}. [1] \quad (4.19)$$



Obrázek 4.3 – Výpočet napětí pro průřez II – II ⁵

Aby hák pevnostně vyhověl, musí být splněna pevnostní podmínka pro maximální tahové napětí v daném průřezu.

$$\sigma_t^{II} \leq \sigma_{Dt}^{II} \quad (4.20)$$

$$77,42 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa} \quad (4.21)$$

Pevnost háku můžeme zkontrolovat i pomocí výpočtu bezpečnosti vůči mezi kluzu, která je dána součinitel bezpečnosti. Součinitel bezpečnosti pro tah je dán poměrem mezi kluzu daného materiálu k maximálnímu tahovému napětí v průřezu II – II

$$k_t^{II} = \frac{Re}{\sigma_t^{II}}, \quad (4.22)$$

⁵ Délkové rozměry jsou v mm.

$$k_t^{II} = \frac{235}{77,42} \doteq 3,04. [1], [12] \quad (4.23)$$

Průřez II – II tedy dle splnění pevnostní podmínky (4.20) i dost velké hodnoty součinitele bezpečnosti k_t^{II} (4.23) pevnostně vyhovuje.

4.2.2 Výpočet dle teorie křivých prutů

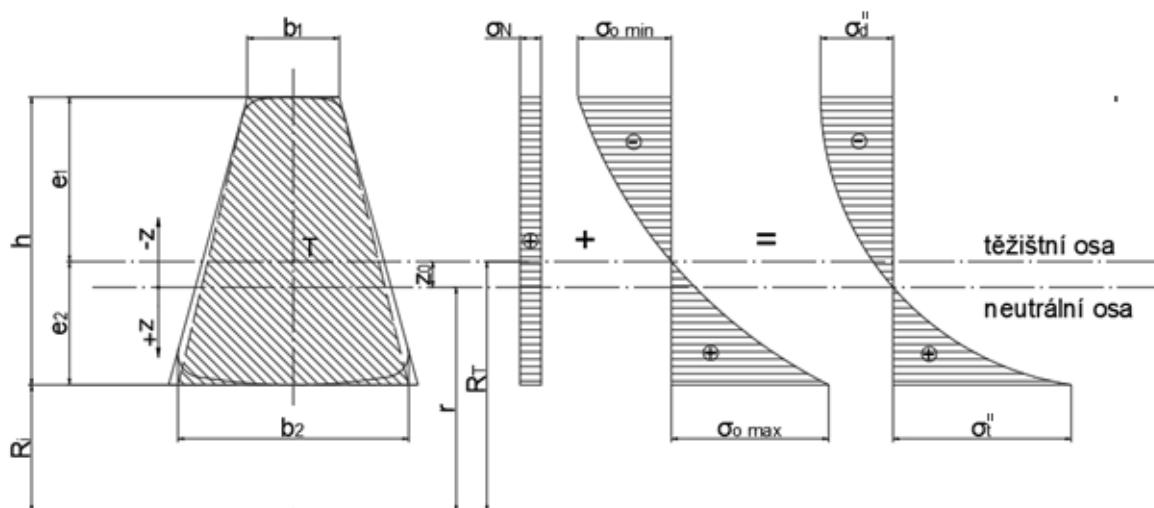
Napětí vypočítáme obecně podle vztahu

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_o, \quad (4.24)$$

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{U_y} \cdot \frac{z}{(r-z)}, \quad (4.25)$$

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{S \cdot z_0} \cdot \frac{z}{(r-z)}, \quad (4.26)$$

kde σ_N je normálové napětí od normálové síly N a σ_o je ohybové napětí od ohybového momentu M . Výsledné napětí má hyperbolický průběh a skládá se z konstantního normálového napětí a ohybového napětí, které se po průřezu mění, jak lze vidět na obrázku 4.3. [2]



Obrázek 4.3 – Výpočet napětí pro průřez II – II

Po dosazení hodnot pro průřez II – II získáváme vztah pro výpočet napětí v libovolném místě průřezu

$$\sigma = \frac{F}{S} + \frac{F \cdot R_T}{S \cdot (R_T - r)} \cdot \frac{z}{(r-z)}, \quad (4.27)$$

kde R_T je poloměr křivosti těžiště průřezu, který je zároveň i ramenem síly F tvořící moment M , a r je poloměr křivosti neutrální osy, který se dán vztahem (2.17)

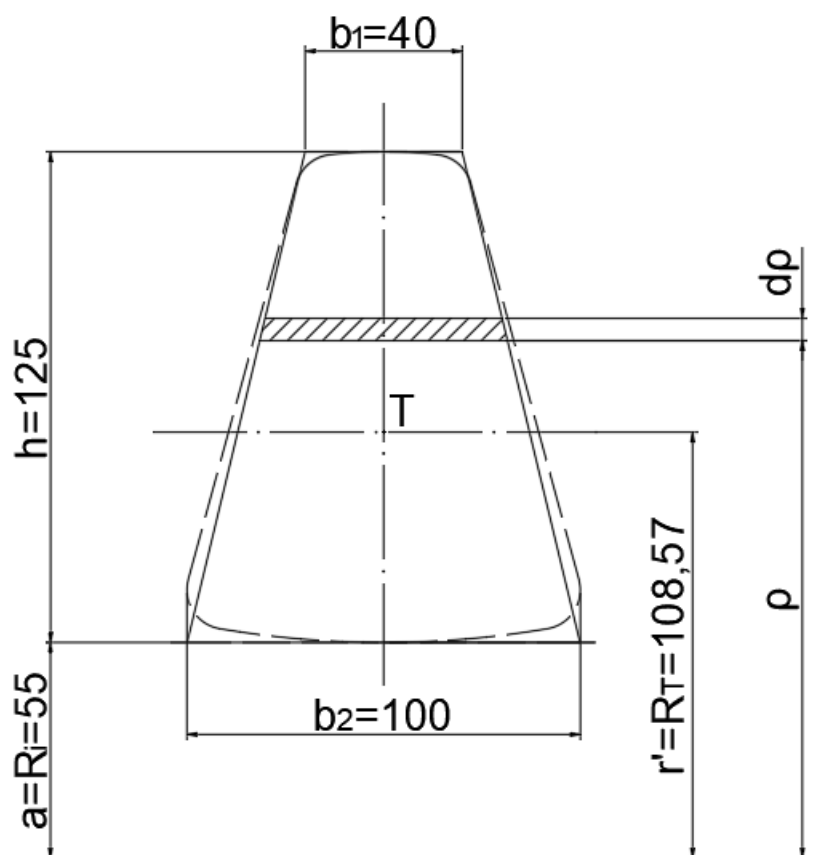
$$r = \frac{S}{\int_{(s)} \frac{dS}{\rho}} \quad (4.28)$$

Reálný průřez jeřábového háku je nahrazen opět lichoběžníkem. Pro výpočet neutrální osy lichoběžníku platí

$$r = \frac{\frac{(b_1+b_2)}{2}h}{\int_a^{h+a} \frac{\left(b_1 + \frac{b_2-b_1}{h}((h+a)-\rho)\right)d\rho}{\rho}} \quad (4.29)$$

$$r = \frac{\frac{h \cdot (b_1+b_2)}{2}}{\frac{b_2 \cdot (h+a) - b_1 \cdot a}{h} \ln \frac{h+a}{a} - (b_2 - b_1)} \quad (4.30)$$

$$r = \frac{\frac{125 \cdot (40+100)}{2}}{\frac{100 \cdot (125+55) - 40 \cdot 55}{125} \ln \frac{125+55}{55} - (100-40)} \doteq 97,37 \text{ mm. [2]} \quad (4.31)$$



Obrázek 4.4 – Výpočet neutrální osy lichoběžníku [2]⁶

Poloměr křivosti neutrální osy r má být menší nebo roven poloměru křivosti těžiště R_T , což je pro výše vypočtenou hodnotu poloměru křivosti neutrální osy r splněno. Matematicky může být tato podmínka zapsána takto

⁶ Délkové rozměry jsou v mm.

$$r \leq R_T = a + e_2, \quad (4.32)$$

$$97,37 \text{ mm} < 108,57 \text{ mm} = 55 + 53,57. \quad [2] \quad (4.33)$$

Zajímají nás opět maximální hodnoty celkového tahového a tlakového napětí v krajních vláknech průřezu, kdy v krajním vnitřním vlákne je napětí tahové a v krajním vnějším vlákne je napětí tlakové. [2]

Pro výpočet tahového napětí platí

$$\sigma_t^{II} = \sigma_N + \sigma_{o \max}, \quad (4.34)$$

$$\sigma_t^{II} = \frac{F}{S} + \frac{F \cdot R_T}{S \cdot (R_T - r)} \cdot \frac{r - R_i}{r - (r - R_i)}, \quad (4.35)$$

$$\sigma_t^{II} = \frac{80000}{8750} + \frac{80000 \cdot 108,57}{8750 \cdot (108,57 - 97,37)} \cdot \frac{97,37 - 55}{97,37 - (97,37 - 55)} \quad (4.36)$$

$$\sigma_t^{II} = 9,1429 + 68,2762 \doteq 77,42 \text{ MPa}, \quad (4.37)$$

kde $\sigma_{o \max}$ je maximální ohybové napětí v průřezu II – II a R_i je poloměr křivosti vnitřního krajního vlákna průřezu, který je roven hodnotě a . [2]

Jak je vidět z rovnice (4.37) a obrázku 4.5, tak hodnota normálového napětí σ_N je kladná, protože se jedná o napětí tahové způsobené tahovou silou F . [2]

Pro tlakové napětí platí

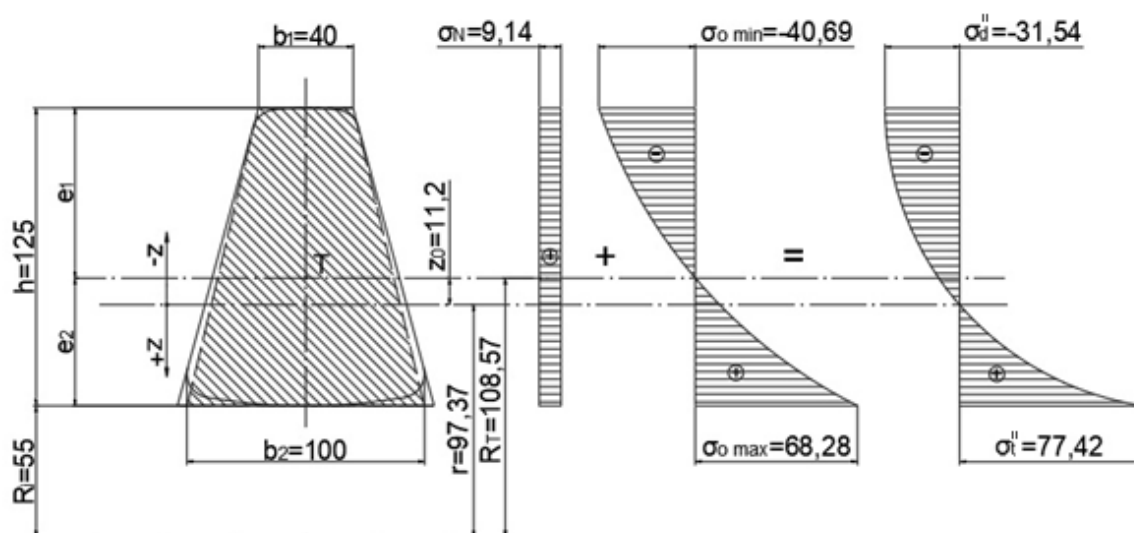
$$\sigma_d^{II} = \sigma_N + \sigma_{o \min}, \quad (4.38)$$

$$\sigma_d^{II} = \frac{F}{S} + \frac{F \cdot R_T}{S \cdot (R_T - r)} \cdot \frac{r - (R_i + h)}{r - (r - (R_i + h))}, \quad (4.39)$$

$$\sigma_d^{II} = \frac{80000}{8750} + \frac{80000 \cdot 108,57}{8750 \cdot (108,57 - 97,37)} \cdot \frac{97,37 - (55 + 125)}{97,37 - (97,37 - (55 + 125))}, \quad (4.40)$$

$$\sigma_d^{II} = 9,1429 - 40,6854 \doteq -31,54 \text{ MPa}, \quad (4.41)$$

kde $\sigma_{o \min}$ je minimální ohybové napětí v průřezu II – II. [2]



Obrázek 4.5 – Výpočet napětí pro průřez II – II ⁷

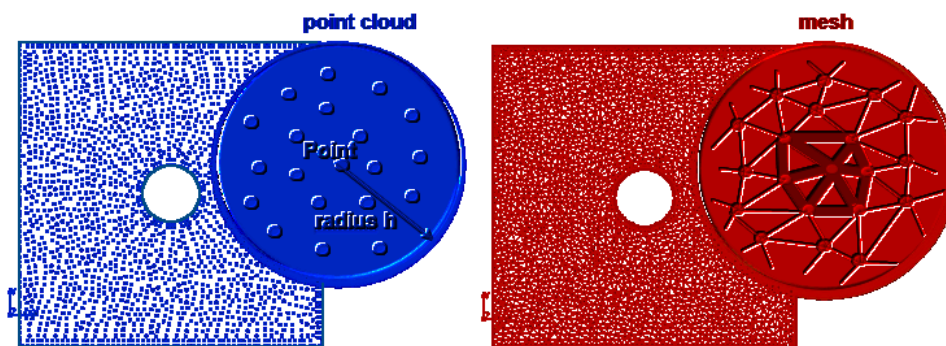
Hodnoty tahového napětí σ_t^{II} a tlakového napětí σ_d^{II} jsou stejné jako při výpočtu napětí dle [1], tudíž bude splněna i pevnostní podmínka dle vztahu (4.20). Součinitel bezpečnosti bude mít stejnou hodnotu jako v minulém výpočtu v rovnici (4.23).

Průřez II – II tedy v důsledku stejných hodnot napětí σ_t^{II} a σ_d^{II} jako při minulém výpočtu dle [1] pevnostně vyhovuje – splňuje pevnostní podmínku (4.20) a vykazuje i dost velké hodnoty součinitele bezpečnosti k_t^{II} (4.23).

⁷ Délkové rozměry jsou v mm a hodnoty napětí v MPa.

5. Úvod k numerickým metodám řešení

Metoda konečných prvků (MKP) patří mezi numerické metody řešení. V současné době nejpoužívanější metodou v oblasti strojního inženýrství – hojně se uplatňuje v leteckém a automobilovém průmyslu. Druhou nejpoužívanější numerickou metodou je metoda hraničních prvků (MHP), kdy se diskretizuje pouze povrch (hranice) daného tělesa. MHP se používá pro lineární úlohy mechaniky. Obě tyto metody jsou založeny na existenci sítě prvků, což pro některé aplikace není vhodné. Tyto metody nejsou vhodné pro simulaci fyzikálních jevů jako šíření trhliny nebo fázové přeměny. Nově se vyvíjí bezsítové metody (Meshfree methods), kde je síť prvků nahrazena množinou libovolně rozložených uzlových bodů. Beszítové metody tedy nevyžadují spojení mezi uzly, ale jsou založeny na interakci každého uzlu s jeho sousedními uzly. [14], [15], [16]



Obrázek 5.1 – Model desky s otvorem pomocí bezsítové metody a MKP [17]

5.1 Historie MKP

Historický vývoj MKP by se dal rozdělit podle dvou hledisek – matematické a inženýrské. Z matematického hlediska se MKP zabývali Lord Rayleigh (1870) a Walther Ritz (1909), kteří ve svých pracích založených na variační formulaci problému využívali interpolačních funkcí, aby získali aproximativní řešení určitého problému. Dalším významným matematikem a inženýrem, který přispěl k ranému vývoji MKP, byl Boris Galerkin (1915). Ten je tvůrcem metody (Garlekinova metoda nebo též Ritzova-Garlekinova metoda), která se používá při řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic, kdy je nahrazena původní rovnice (silná formulace) její integrální formou (slabým řešením) a následnou diskretizací slabého řešení. Tato metoda je metodou vážených reziduí. [22], [21]

50. léta 20. století lze považovat za začátky metody konečných prvků. Alexander Hrennikoff a Richard Courant ve svých pracích použili stejnou metodu, kdy spojitou oblast rozdělili do množiny samostatných podoblastí. Hrennikoff používal rozdělení pomocí

mřížky, naopak Courant používal trojúhelníkové elementy, kterými se snažil vyplnit danou oblast. [18]

Z inženýrského hlediska se první náznaky metody konečných prvků objevují v postupech řešení problémů v období před druhou světovou válkou. Toto období souvisí s rozvoje leteckého průmyslu, jsou kladeny stále větší nároky na zatížení a rychlost strojů. Bez podpory moderní počítačové techniky byly vytvořeny postupy – tzv. maticové metody mechaniky, která zahrnují silové, deformační i smíšené přístupy k řešení úloh pružnosti. (viz kapitola 5.2). [21]

Autorem první knižní publikace zabývající se metodou konečných prvků je polsko-britský matematik Olgierd Zienkiewicz. Dále se MKP zabýval také John Argyris a Ray William Clough. Z našich autorů to byl např. Miloš Zlámal, Vladimír Kolář a Alexander Ženíšek. V 60. letech byl vyvinut s podporou Národního úřadu pro kosmonautiku (NASA) výpočetní software NASTRAN. Za zmínku stojí i další konečnoprvkové programy jako Ansys, Marc, PAM-Crash a další. [18], [20]

5.2 Přístupy k řešení přímé úlohy pružnosti

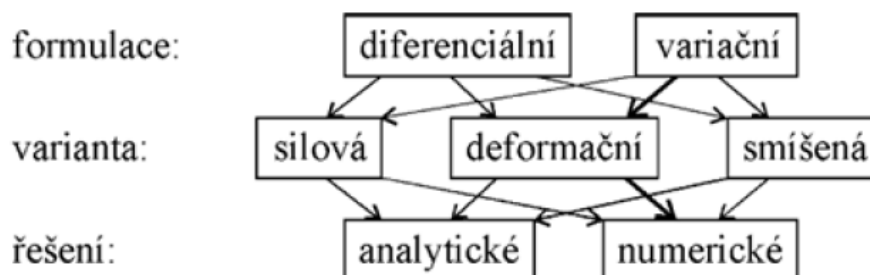
Aby bylo jasné, z čeho vychází princip metody konečných prvků, budou v této kapitole vysvětleny hlavní strategie při řešení obecného problému pružnosti. Přístupy k řešení dělíme podle tří hledisek – hledisko matematické formulace problému, hledisko výběru nezávislých funkcí pružnosti a hledisko vlastní realizace řešení. [19]

Existují dvě matematické formulace teorie pružnosti – diferenciální (silná) formulace a variační formulace (energetický přístup). Diferenciální formulací získáme soustavu diferenciálních rovnic vztahující se k danému problému. Pro řešení je nutné znát okrajové podmínky. Při variační formulaci se řešení problému hledá jako stav, kdy energie tělesa dosahuje extrémní hodnoty, která představuje hodnotu stacionární. Tohoto energetického přístupu se využívá především při aplikaci numerických metod a MKP. [16], [19]

Podle výběru nezávislých neznámých (tzv. primárních neznámých) funkcí rozlišujeme tři přístupy k řešení přímé úlohy pružnosti, a to je deformační, silový a smíšený přístup. Deformační přístup bere jako neznámé složky posuvů (primární neznámé), tzv. sekundární neznámé jsou pak složky napětí, při silovém přístupu jsou neznámými složky napětí a při smíšeném jsou to složky napětí i posuvů. [19]

Z hlediska vlastní realizace řešení rozlišujeme dva přístupy k řešení úlohy – numerický a analytický. Při řešení určitého problému pomocí některé z numerických metod dostaneme výsledek přibližný – numerické řešení je tedy řešení přibližné. Provádí se

diskretizace spojitého problému. Numerické řešení lze provést prakticky pro jakýkoli typ úlohy, ale platí, že čím složitější je úloha, tím větší jsou požadavky na hardware. Složitější úlohy vyžadují také delší výpočetní čas. Na rozdíl od analytického řešení, kdy získáme obecnou závislost mezi vstupními veličinami a výstupními veličinami daného problému v podobě určité funkce, nám numerické řešení poskytne výsledek vztahující se jen k danému problému. Při úpravě některých vstupních parametrů úlohy je tedy nutné opakovat celý proces řešení. [14]



Obrázek 5.2 – Schéma rozdělení přístupu k řešení [19]

5.3 Princip MKP

Metoda konečných prvků se používá k simulaci průběhů napětí, deformací, vlastních frekvencí, proudění tepla, jevů elektromagnetismu, proudění tekutin atd. Dochází k diskretizaci spojitého kontinua do konečného počtu prvků. Napětí, deformace nebo jiné parametry, které nás zajímají, jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech.[18]

Metoda konečných prvků zde bude vysvětlena jako variační metoda. Kromě tohoto přístupu může být pro odvození základních vztahů aplikován i přístup přímý nebo může být využit postup pomocí metody vážených reziduí. Cílem práce není odvozovat tyto vztahy, ale poukázat na to, z čeho metoda konečných prvků vychází. [21]

Deformační varianta metody konečných prvků je založena na Lagrangeově variačním principu (nebo také princip minima potenciální energie), jehož definice zní: „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“ Lze dokázat, že uvedená stacionární hodnota existuje, je jednoznačná a představuje zároveň minimum, těleso se tedy umístí do takové polohy, kdy je jeho celková energie minimální. Pro Π platí:

$$\Pi = U - P, \quad (5.1)$$

Kde U je vnitřní energie

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5.2)$$

a P je potenciál vnějšího zatížení

$$P = \iiint_{(V)} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{X} dV + \iint_{(S)} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} dS. \quad (5.3)$$

Ve výše uvedených vztazích figurují sloupcové matice

$$\text{– posuvů} \quad \mathbf{u}^T = [u, v, w] \quad (5.4)$$

$$\text{– přetvoření} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] \quad (5.5)$$

$$\text{– napětí} \quad \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}] \quad (5.6)$$

$$\text{– souřadnice} \quad \mathbf{X}^T = [x, y, z] \quad (5.7)$$

$$\text{– plošného zatížení (tlak)} \quad \mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z] \quad (5.8)$$

Hledáme minimum celkové potenciální energie Π , musí tedy platit

$$\delta \Pi = 0. \quad [21] \quad (5.9)$$

5.4 Postup MKP

Jak již bylo řečeno, při metodě konečných prvků je těleso rozloženo na konečný počet elementů, jejichž neznámé parametry (posuvy, napětí nebo obojí) chceme zjistit. Pokud bereme deformační variantu MKP, což je nejvíce používaná varianta, kdy jsou za nezávislé neznámé považovány posuvy. Ty se pak nahrazují náhradními funkcemi, které mají tvar polynomů prostorových souřadnic. Obecný postup MKP by se dal shrnout do několika bodů:

- Rozdělení řešeného tělesa na jednotlivé elementy konečného počtu a velikosti (vytvoření konečnoprvkového modelu)
- Analýza jednotlivých elementů – zjišťuje se chování elementů s cílem popsat toto chování pomocí rovnic
- Složení a získání výsledné soustavy rovnic popisující chování celého systému pomocí rovnic získaných při analýze elementů
- Aplikace okrajových podmínek (vazby, zatížení)
- Vlastní řešení systému rovnic – v případě deformační varianty MKP získání výsledků pro primární neznámé – posuvy
- Získání dodatečných výsledků odvozením (přetvoření, napětí)

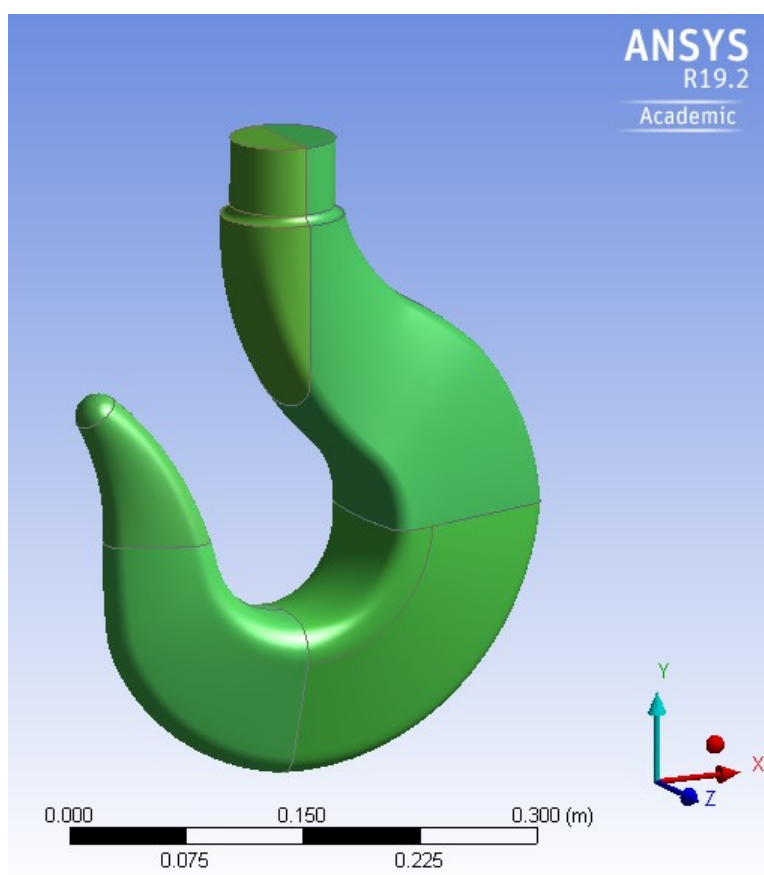
[21]

6. Výpočet pomocí MKP

Numerický výpočet jeřábového háku pomocí metody konečných prvků je proveden v programu ANSYS Workbench 19.2. Jde zde hlavně o výpočet napětí v průřezu II – II a zobrazení celkového průběhu napětí.

6.1 Model geometrie

Model jeřábového háku byl vytvořen v programu Autodesk Inventor Professional 2017 a importován do programu ANSYS Workbench 19.2, kde byl upraven v DesignModeleru. Model byl rozdělen na části pomocí funkce Slice rovinou YZ a rovinou XZ pro následnou lepší vizualizaci napětí a lepší práci se sítí.






Obrázek 6.1 – Model geometrie

6.2 Materiál

Pro numerický výpočet byl v programu ANSYS Workbench 19.2 vytvořen materiál s názvem ocel a byly zadány všechny jeho potřebné materiálové parametry, tzn. Youngův

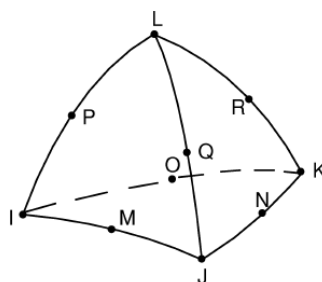
modul a Poissonova konstanta. Tyto a další materiálové parametry jsou zobrazeny v tabulce 6.1.

Tabulka 6.1 – Materiálové parametry

1	Property	Value	Unit
2	 Material Field Variables	 Table	
3	 Isotropic Elasticity		
4	Derive from	Young's Modulus and...	
5	Young's Modulus	2.1E+11	Pa
6	Poisson's Ratio	0.3	
7	Bulk Modulus	1.75E+11	Pa
8	Shear Modulus	8.0769E+10	Pa

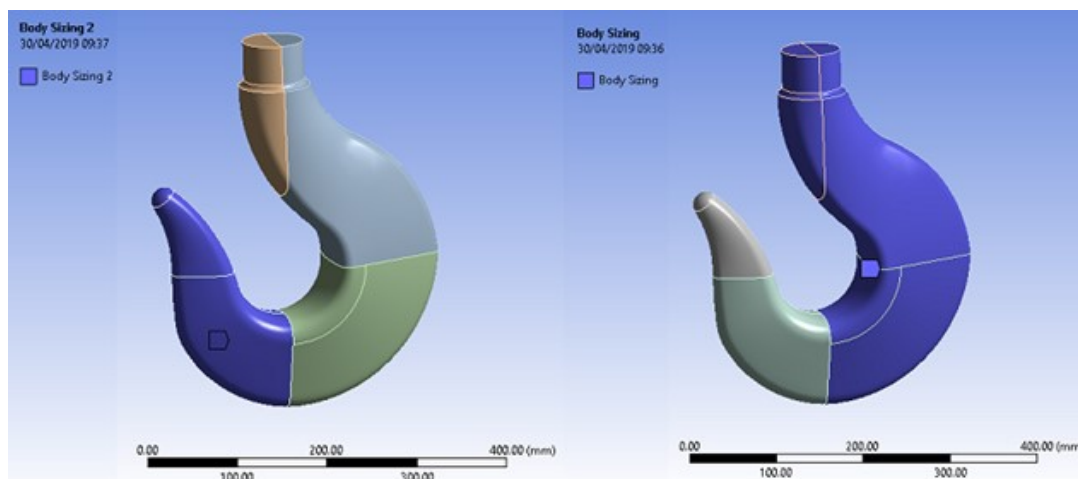
6.3 Konečnoprvkový model

Pro vytvoření konečnoprvkového modelu byla použita dvakrát funkce Body Sizing. Na pravou část háku byla použita funkce Body Sizing s velikostí elementů 10 mm, na levou část s velikostí elementů 15 mm. Síť je tvořena prvky SOLID187, což jsou čtyřstěny s deseti uzly. Jedná se o kvadratické prvky (prvky s meziuzly).

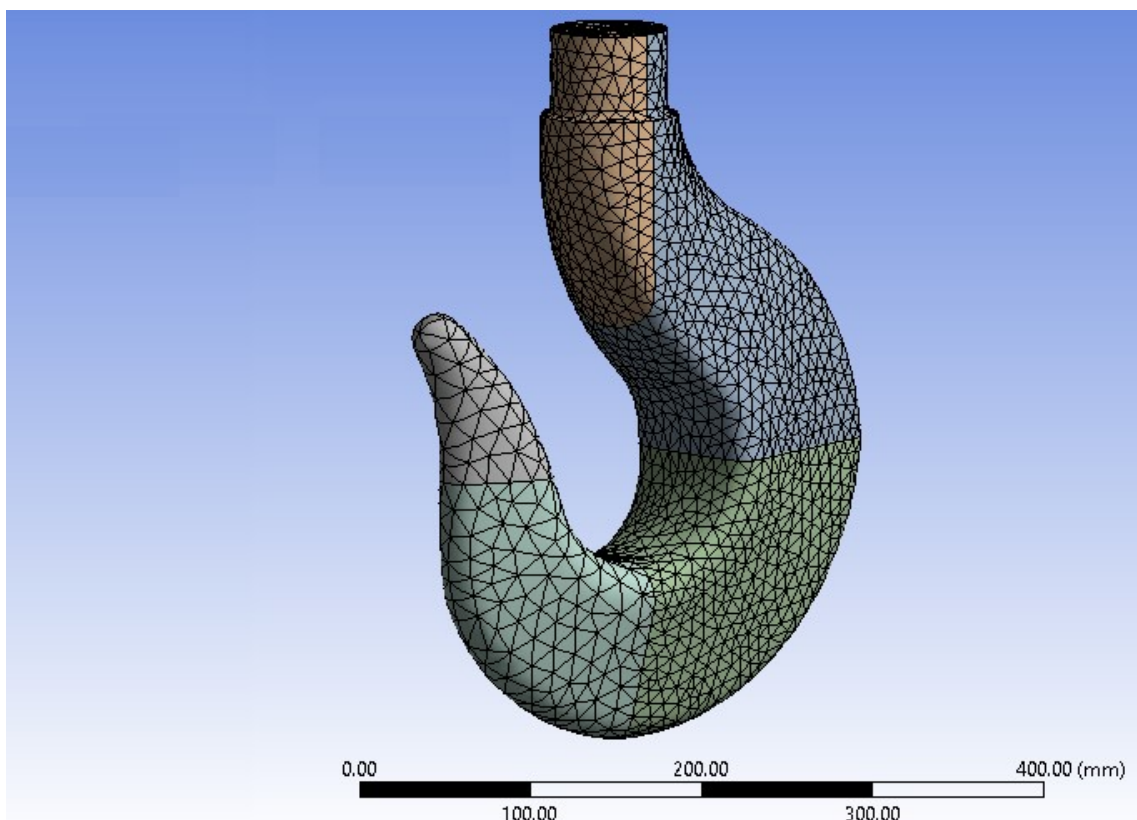


Obrázek 6.3 – Prvek SOLID187 [23]

Bylo by možné zde využít i symetrie součásti (funkce Symmetry) podle roviny YZ, kdy by se pracovalo jen s polovinou háku. Zatížení by bylo pak také poloviční.



Obrázek 6.2 – Body Sizing

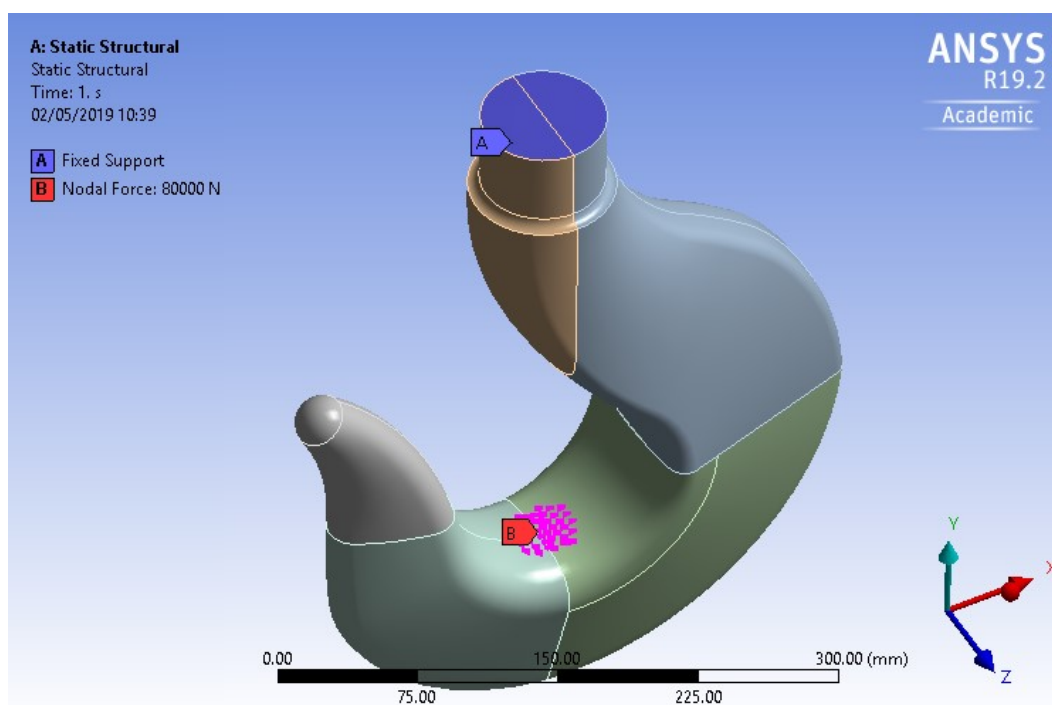


Obrázek 6.3 – Konečnoprvkový model

6.4 Model okrajových podmínek

Horní část háku, kde je ve skutečnosti závit uchycený v matici, která je pojištěna závlačkou, a nahoře matice je drážka na příložku, která brání otáčení háku, je ve výpočtovém modelu nahrazen čepem s průměrem d_3 . Horní plocha tohoto čepu je dokonale vetknuta (Fixed Support).

Zatížení, které zde představuje síla $F = 80000$ N, působí v ose y . Pomocí funkce Nodal Force je tato síla rozdělena do 40 uzlů na povrchu háku okolo osy y . Nodal Force se tak snaží nahradit osamělou sílu působící na hák.

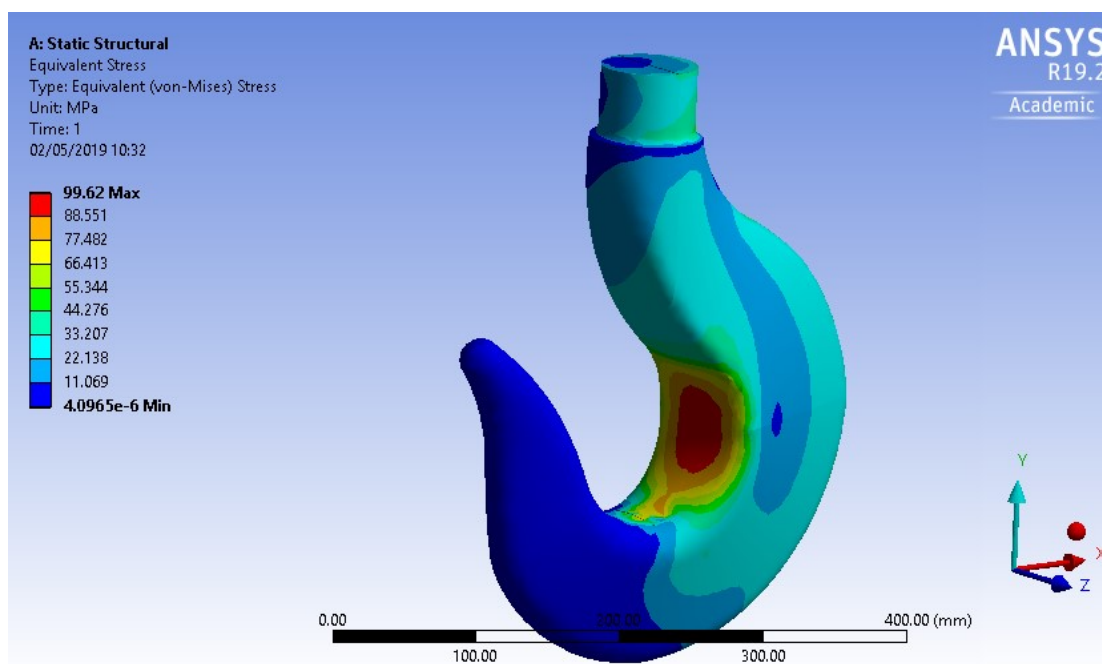


Obrázek 6.4 – Model okrajových podmínek

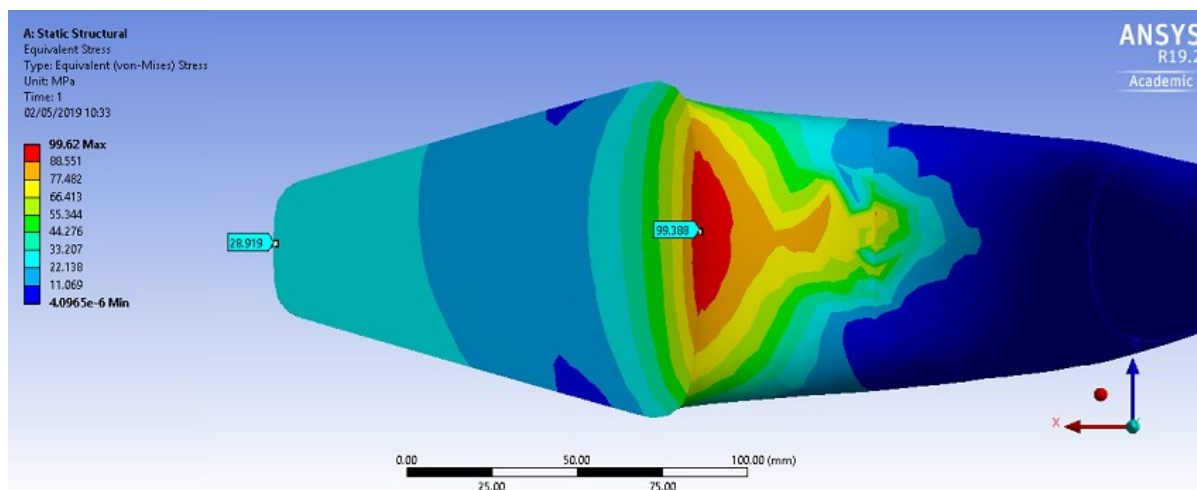
6.5 Výsledky napětí

6.5.1 Redukované napětí (HMH)

Na obrázku 6.5 je znázorněn průběh redukovaného napětí podle hypotézy HMH (von Mises) na povrchu modelu. Je zde jasně vidět místo největšího namáhání háku (červená oblast) a naopak místa, kde je napětí prakticky nulové (modrá oblast).



Obrázek 6.5 – Redukované napětí dle HMH



Obrázek 6.6 – Redukované napětí v průřezu II – II

Na obrázku 6.6 je znázorněn průběh redukovaného napětí v průřezu II – II. Můžeme zde vidět zvýrazněné hodnoty maximálního tahového a tlakového napětí, které jsou rovny

$$\sigma_t^{II} = 99,39 \text{ MPa} \quad (6.1)$$

pro tah a

$$\sigma_d^{II} = 28,92 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

pro tlak.

Pevnostní podmínka dle (3.15) je splněna, neboť platí

$$\sigma_t^{II} \leq \sigma_{Dt}^{II}, \quad (6.3)$$

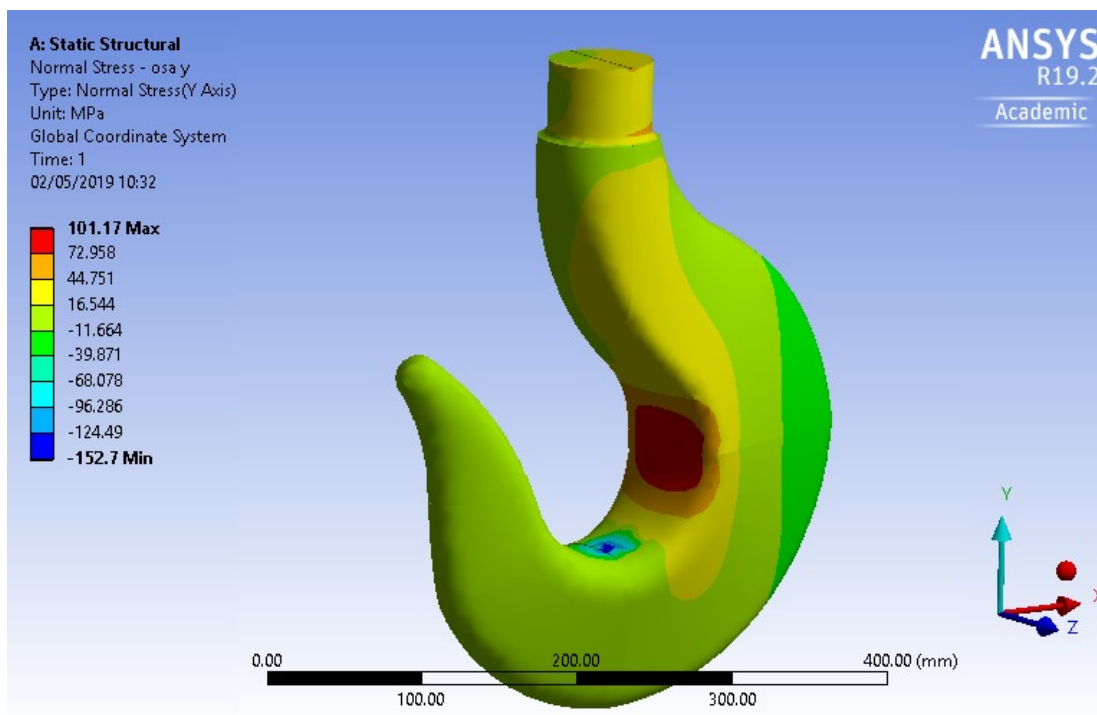
$$99,39 \text{ MPa} \leq 100 \text{ MPa}. \quad (6.4)$$

Pro hodnotu součinitele bezpečnosti pak platí

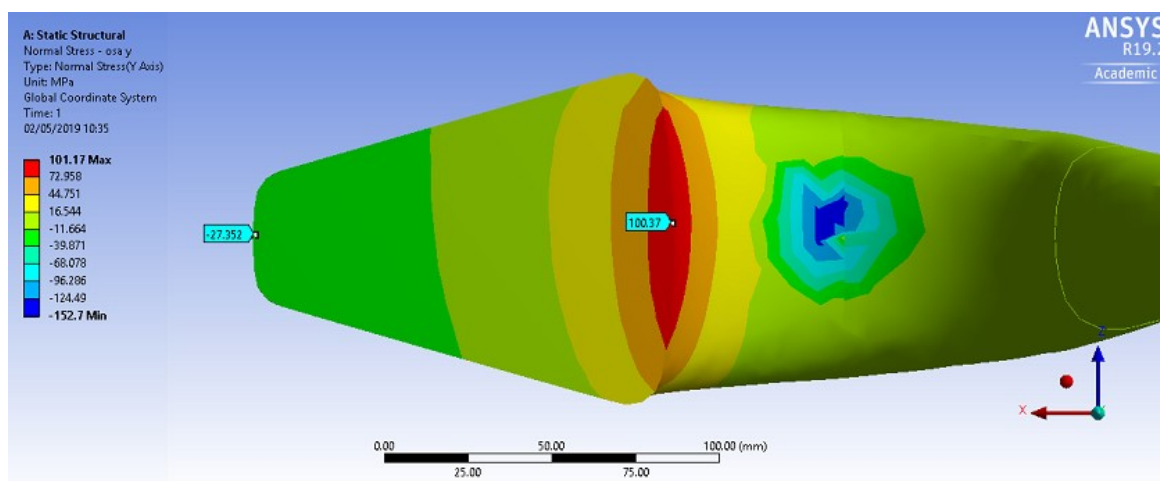
$$k_t^{II} = \frac{Re}{\sigma_t^{II}} = \frac{235}{99,39} = 2,36. \quad (6.5)$$

6.5.2 Normálové napětí v ose y

Pro porovnání s analytickými výsledky nás zajímá především normálové napětí v ose y. Jeho průběh můžeme vidět na obrázku 6.7.



Obrázek 6.7 – Normálové napětí v ose y



Obrázek 6.8 – Normálové napětí v ose y v průřezu II – II

Na obrázku 6.8 je vidět průběh normálového napětí v ose y v průřezu II – II. Maximální tahové napětí a maximální tlakové napětí zde představují hodnoty

$$\sigma_t^{II} = 100,37 \text{ MPa} \quad (6.6)$$

pro tah a

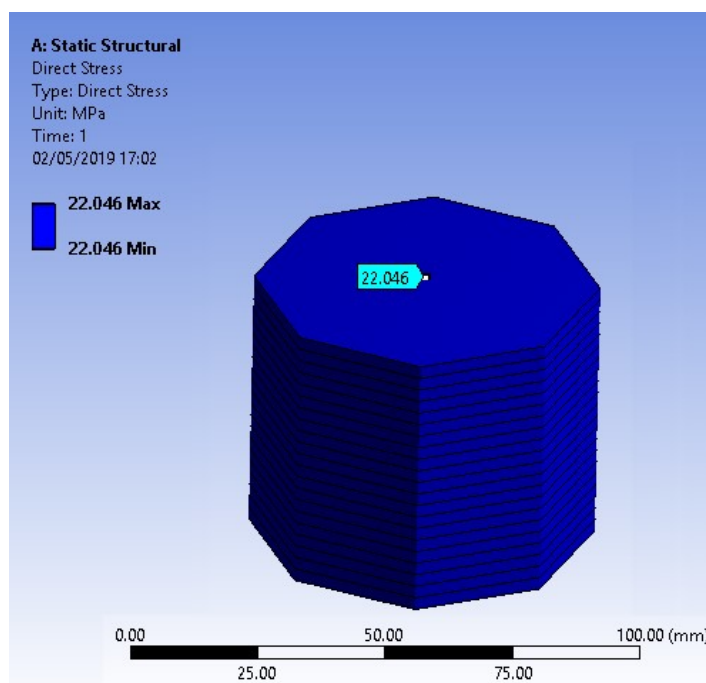
$$\sigma_d^{II} = -27,35 \text{ MPa} \quad (6.7)$$

pro tlak.

Pevnostní podmínka dle (3.15) je téměř splněna, tahové napětí je o 0,37 MPa větší, než je dovolená mez. Tato hodnota je ale ve srovnání s hodnotami napětí zanedbatelná. Součinitel bezpečnosti je roven

$$k_t^{II} = \frac{Re}{\sigma_t^{II}} = \frac{235}{100,37} = 2,34. \quad (6.8)$$

V průřezu I – I představuje síla F osamělou tahovou sílu působící v ose y. Jelikož ve výpočtovém modelu pracujeme se silou rozloženou do několika uzlů, výsledky napětí pro průřez I – I nejsou vyhovující. Abychom dostali lepší výsledky byl vytvořen v programu ANSYS Workbench 19.2 jednoduchý čep pomocí nosníkových prvků představující horní část háku. Průměr čepu je d_3 . Čep byl nahoře vetknut (Fixed Support) a dole zatížen osamělou silou $F = 80000$ N (Force). Průběh napětí můžeme vidět na obrázku 6.9.



Obrázek 6.9 – Napětí v průřezu I – I

Jedná se o normálové napětí tahové, jehož hodnota je rovna

$$\sigma_t^I = 22,05 \text{ MPa} \quad (6.9)$$

a součinitel bezpečnosti pro tento průřez je pak roven

$$k_t^I = \frac{Re}{\sigma_t^I} = \frac{235}{22,05} = 10,66. \quad (6.10)$$

7. Porovnání výsledků

V této kapitole jsou porovnány výsledky analytických výpočtů s výsledky numerického výpočtu. Porovnávají se jednak hodnoty napětí, jednak hodnoty součinitele bezpečnosti pro oba průřezy.

Tabulka 7.1 – Hodnoty napětí⁸

analyticky	Průřez I – I		Průřez II – II			
			výpočet dle [1]		výpočet dle teorie křivých prutů	
	tah		tah	tlak	tah	tlak
	22,03		77,42	-31,54	77,42	-31,54
numericky	Průřez I – I	Napětí	Průřez II – II			
	tah		tah		tlak	
	22,05	Redukované	99,39		28,92	
		Normálové	100,37		-27,35	

Tabulka 7.2 – Hodnoty součinitele bezpečnosti

analyticky	Průřez I – I		Průřez II – II			
			výpočet dle [1]		výpočet dle teorie křivých prutů	
	v tahu		v tahu	v tlaku	v tahu	v tlaku
	10,67		3,04	-	3,04	-
numericky	Průřez I – I	Napětí	Průřez II – II			
	v tahu		v tahu		v tlaku	
	10,66	Redukované	2,36		-	
		Normálové	2,34		-	

Hodnoty napětí i součinitele bezpečnosti v tahu analytického a numerického výpočtu pro průřez I – I jsou téměř stejné, je zde jen malá odchylka. Větší rozdíl můžeme vidět u hodnotu průřezu II – II. Zde se celkem výrazně liší hodnoty napětí v tahu a s tím související hodnoty součinitele bezpečnosti v tahu. Tento rozdíl hodnot může být způsoben zjednodušením průřezu při analytickém výpočtu, kdy místo skutečného průřezu jeřábového háku bylo počítáno s průřezem lichoběžníkovým.

Pro objektivnější porovnání výsledků je vypočítána odchylka, která je pro hodnoty napětí stanovena podle vzorce

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\text{Analytické řešení} - \text{Numerické řešení}}{\text{Analytické řešení}} \right| \cdot 100 \quad (7.1)$$

⁸ Hodnoty napětí jsou v MPa.

a pro hodnoty součinitele bezpečnosti v tahu podle vzorce

$$\Delta k_t = \left| \frac{\text{Analytické řešení} - \text{Numerické řešení}}{\text{Analytické řešení}} \right| \cdot 100 \quad [\%] \quad (7.2)$$

V tabulkách 7.3 a 7.4 jsou hodnoty těchto odchylek. Pro průřez II – II byla odchylka počítána z hodnot normálového napětí v ose y a s ním souvisejícího součinitele bezpečnosti v tahu.

Tabulka 7.3 – Odchylka $\Delta\sigma$

Odchylka $\Delta\sigma$ [%]		
Průřez I – I	Průřez II – II	
tah	tah	tlak
0,09	29,64	0,13

Tabulka 7.4 – Odchylka Δk_t

Odchylka Δk_t [%]	
Průřez I – I	Průřez II – II
v tahu	v tahu
0,09	23,03

Závěr

Bakalářská práce se zabývá pevnostním výpočtem jeřábového háku, konkrétně jednoduchého jeřábového háku zatíženého osamělou silou v jeho svislé ose. Tento problém je řešen analyticky i numericky. Analytický výpočet je proveden dvěma způsoby – dle [1] a pomocí teorie křivých prutů. Numerický výpočet je proveden metodou konečných prvků v programu ANSYS Workbench 19.2. Nakonec jsou výsledky numerického a analytického výpočtu porovnány. Pevnostní výpočet háku je v práci objasněn i po stránce teoretické. Je zde popsána problematika ohybu křivých prutů, pojednává se o vlastnostech a parametrech jeřábového háku a zjednodušeně je vysvětlena metoda konečných prvků, včetně historie numerických metod.

Byl proveden rozbor namáhání pro tři příčné průřezy háku. První průřez byl namáhán tahem od působící síly, ve druhém průřezu bylo dominantní ohybové a normálové napětí a ve třetím se vyskytovalo jen smykové napětí od ohybového momentu, které bylo kvůli své malé hodnotě a faktu, že je na povrchu tělesa nulové, v práci zanedbáno.

Cílem výpočtů bylo zjištění maximálních hodnot napětí v průřezech I – I a II – II a pevnostní kontrola háku, která zahrnovala ověření podmínky pevnosti a také výpočet součinitele bezpečnosti. Dovolená napětí byla stanovena dle [1] (tabulka 4.3). Materiálem háku byla zvolena ocel ČSN 12020.1, její parametry jsou uvedeny v tabulce 4.2, včetně hodnoty meze kluzu $R_e = 235 \text{ MPa}$. Působící síla byla dána součinem nosnosti háku dle tabulky 1.1 a tíhového zrychlení g . Hodnota síly je $F = 80000 \text{ N}$.

Při analytickém výpočtu bylo použito určité zjednodušení, kdy místo skutečného průřezu jeřábového háku bylo počítáno s průřezem lichoběžníkovým. Výsledky analytického výpočtu jsou uvedeny v tabulce 7.1 a 7.2. Pro průřez I – I vyšla hodnota tahového napětí rovna $22,03 \text{ MPa}$ a hodnota součinitele bezpečnosti v tahu $10,67$, podmínka pevnosti byla splněna. Výsledky pro průřez II – II byly získány výpočtem dle [1] a výpočtem dle teorie křivých prutů. Důležité jsou hodnoty maximálního tahového a tlakového napětí v průřezu. Tyto hodnoty napětí vyšly pro obě použité metody výpočtu stejně. Maximální tahové napětí je $77,42 \text{ MPa}$ a maximální tlakové napětí $-31,54 \text{ MPa}$. Součinitel bezpečnosti byl počítán jen pro tahové napětí, jeho hodnota je $3,04$. Pevnostní podmínka byla splněna.

Numerický výpočet byl proveden zvlášť pro průřez I – I, kdy síla F představovala osamělou sílu, působící na jednoduchý čep o průměru d_3 . Čep byl vytvořen nosníkovými prvky a představoval horní část háku. Hodnota napětí je $22,05 \text{ MPa}$ a hodnota součinitele bezpečnosti v tahu $11,47$. Podmínka pevnosti byla splněna. Pro výpočet napětí v průřezu II – II byl použit celý model jeřábového háku vytvořený v programu Autodesk Inventor

Professional 2017, který byl importován do programu ANSYS Workbench 19.2. Byl zvolen materiál a následně vytvořen konečnoprvkový model. Síla F zde byla zadána funkcí Nodal force, která rozdělí sílu do předem zvolených uzlů. Výsledky numerického výpočtu jsou uvedeny v tabulkách 7.1 a 7.2. Pro následné porovnání s analytickými výsledky jsou zásadní hodnoty normálového napětí v ose y , které jsou rovny $100,37 \text{ MPa}$ pro maximální tahové napětí a $-27,35 \text{ MPa}$ pro maximální tlakové napětí, a součinitele bezpečnosti v tahu, jehož hodnota je $2,34$. Podmínka pevnosti byla téměř splněna, tahové napětí je o $0,37 \text{ MPa}$ větší, než byla stanovena dovolená mez, což může být způsobeno drobnou nepřesností numerického výpočtu. Tato hodnota je ale ve srovnání s hodnotami napětí zanedbatelná.

Výsledky numerického a analytického výpočtu pro průřez I – I jsou téměř shodné, vykazují velmi malou odchylku jak napětí, tak součinitele bezpečnosti v tahu. Výraznější rozdíl lze vidět u tahových napětí a součinitelů bezpečnosti v průřezu II – II, kdy je odchylka napětí rovna $29,64\%$ a odchylka součinitele bezpečnosti $23,03\%$. Tento rozdíl je způsoben zjednodušením průřezu při analytickém výpočtu, kdy byl místo skutečného průřezu jeřábového háku uvažován průřez lichoběžníkový.

Seznam použité literatury

- [1] REMTA, František a Ladislav KUPKA. *Jeřáby*. I. díl. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1956. Česká matice technická, č. spisu 313, roč. 59 (1956)
- [2] LENERT, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 1998. ISBN 80-7078-572-1.
- [3] HOSCHL, Cyril. *Pružnost a pevnost ve strojnictví*. SNTL Praha 1971
- [4] Historie jeřábů a zdvihacích zařízení. In: *Revize zdvihacích zařízení a jeřábů, školení jeřábníků a vazačů* | Jan Hlavatý [online]. Neratovice: Jan Hlavatý, 2017 [cit. 2019-02-22]. Dostupné z: <https://www.skolenirevize.cz/historie-jerabu.php>
- [5] Jeřáb (stroj). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-02-22]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Je%C5%99%C3%A1b_\(stroj\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Je%C5%99%C3%A1b_(stroj))
- [6] Jeřáby k zvedání a přemísťování břemen. In: *Stavební-vzdělání.cz« Web o stavebnictví* [online]. Praha: Stavební-vzdělání.cz, 2013 [cit. 2019-02-22]. Dostupné z: <https://www.stavebni-vzdelani.cz/jezaby/>
- [7] Křivé pruty. In: *ČVUT FS* [online]. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2018 [cit. 2019-03-13]. Dostupné z: http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/PP/Krive_pruty.pdf
- [8] LEINVEBER, Jiří a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky: učebnice pro školy technického zaměření*. Šesté vydání. Úvaly: Albra, 2017. ISBN 978-80-7361-111-8.
- [9] Normy ČSN – Bezpečnostní tabulky. *Normy ČSN – Bezpečnostní tabulky* [online]. Hradec Králové: TECHNOR, 2019 [cit. 2019-02-22]. Dostupné z: <http://www.technicke-normy-csn.cz/>
- [10] Kované háky dle DIN 15401 / 15402. In: *Vingu-Steel s.r.o. – vázací prostředky a zdvihací zařízení* [online]. Brno: Vingu-Steel, 2019 [cit. 2019-02-22]. Dostupné z: <http://www.vingu.cz/katalog/kovane-haky-dle-din-15401-15402>
- [11] Jeřábové háky. In: *Jeřáby a zdvihací zařízení* [online]. Brno: KRALOVO POLE CRANES, 2019 [cit. 2019-03-13]. Dostupné z: <https://www.kpc.cz/cs/produkty/komponenty-zdvihu-jerabu/jezabove-haky.aspx>
- [12] Mezní stavy a bezpečnost. In: *Onlineschool.cz: Pružnost a pevnost pro strojní fakulty* [online]. Onlineschool.cz, 2018 [cit. 2019-03-15]. Dostupné z: <https://onlineschool.cz/pruznost-pevnost/mezni-stavy-bezpecnost/>
- [13] FUXA, Jan a Ludmila ADÁMKOVÁ. *Sbírka příkladů z pružnosti a pevnosti II*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1288-5.
- [14] FUSEK, Martin. *MKP v Nastranu a Patranu: studijní opora do cvičení předmětu "MKP I"*. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2011. ISBN 978-80-248-2730-8.
- [15] *Bezsíťové metody ve výpočetní dynamice tekutin* [online]. Brno, 2012 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace?zp_id=47403&aid_redir=1. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně.

- [16] FUSEK, Martin a Radim HALAMA. *MKP a MHP – interaktivní studijní materiál. Matematika pro inženýry 21. století*. [online] 2012. [cit. 2019-04-26]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mkpamhp_obr.pdf
- [17] MESHLESS MODELING AND SIMULATION. In: *Simulation Software from Nohgrid (CAE, CFD, Thermal, Structure)* [online]. Bodenheim, Německo: Nohgrid, 2019 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: <https://www.nohgrid.com/pages/support-en/meshless-modeling-and-simulation>
- [18] Metoda konečných prvků. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_kone%C4%8Dn%C3%BDch_prvk%C5%AF
- [19] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2011 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: <http://www.umat.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [20] VRBKA, Martin a Michal VAVERKA. *Metoda konečných prvků* [online]. Ústav konstruování. [cit. 2019-04-28] Dostupné z: http://www.shigley.cz/images/texts/file/prednaska1_mkp.pdf
- [21] FUSEK, Martin a Jaroslav ROJÍČEK. *Metoda konečných prvků I* [online]. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2013 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: http://projekty.fs.vsb.cz/463/edubase/VY_01_010/
- [22] Galerkinova metoda. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2019-04-29]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Galerkinova_metoda
- [23] *ANSYS Theory Reference*. 001242. Eleventh Edition. SAS IP, Inc. ©